This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06637137 2

Praktisches
Maschinenrechnen.

Eine Zusammenstellung

der wichtigsten Erfahrungswerte

aus der allgemeinen und angewandten Mechanik

in ihrer Anwendung

auf den praktischen Maschinenbau.

Erläutert

durch zahlreiche der Praxis entnommene Beispiele

und eingeleitet durch

eine leichtfafsliche Darstellung

der

für Maschinenbauer unentbehrlichen Gesetze des allgemeinen Buchstabenrechnens.

Bearbeitet von

A. Weickert und **R. Stolle,**

Ingenieure und Fachlehrer für Maschinenzeichnen und Mechanik in Berlin.

Mit über 100 in den Text gedruckten Abbildungen.

Dritte verbesserte und vermehrte Auflage.

Sechstes und siebentes Tausend.

Berlin 1898.

Polytechnische Buchhandlung

A. Seydel.

Vos. Hochste.
Mechaniker
Aach

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
301266A
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1927 L

Nachdruck und Übersetzungsrecht vorbehalten.

NEW YOR
PUBLIC
LIBRARY

Vorwort zur ersten Auflage.

Die Einrichtung unserer bestehenden Fach- und Fortbildungsschulen bedingt es, dafs einem für das praktische Leben so bedeutungsvollen Unterrichtsgegenstande, wie ihn der Titel dieses Buches nennt, nur verhältnismäfsig wenig Zeit gewidmet werden kann, und so der Schüler schliefslich, nachdem er die Schule verlassen, behufs weiterer Verarbeitung des in der Schule Gehörten zum Selbstunterricht greifen mufs.

Dem Schüler bereits in der Schule ein für seinen späteren Beruf geeignetes und auch in seiner weiteren praktischen Thätigkeit verwendbares Material zu bieten, ist der Zweck des vorliegenden Werkchens.

Zum Verständnis des in demselben Gebotenen ist die Kenntnis der nur notwendigsten mathematischen Gesetze vorausgesetzt und sind, um Schüler und Leser bezüglich der auszuführenden Berechnungen zu unterstützen, in direkter Verbindung mit dem Buche die einfachsten Regeln des allgemeinen Buchstabenrechnens in elementarer Weise entwickelt.

Wir hoffen, dafs diese Verbindung vielen Lesern willkommen sein wird, da dieselbe bei dem Durcharbeiten des Textes und der Beispiele ein Nachschlagen jederzeit gestattet und so die Bestrebungen des Einzelnen, schnell vorwärts zu kommen, begünstigt.

Die in den einzelnen Kapiteln gegebenen Beispiele entsprechen rein praktischen Verhältnissen und möchten wir, da sich ein Mangel gerade in dieser Beziehung oft recht bemerklich macht, den Herren Lehrern der Mechanik die vorliegende Arbeit zur Benützung für die Schüler ihrer Lehranstalten hiermit empfehlen.

Dafs der Text des Buches in der neuen Orthographie gesetzt ist, dürfte, um dasselbe für Schulzwecke geeignet zu machen, hervorgehoben werden.

Indem wir das Buch der Öffentlichkeit übergeben, richten wir an die Leser desselben die höfliche Bitte, uns auf etwaige

Mängel, auf Fehlendes oder wünschenswerte Erweiterungen gefälligst aufmerksam machen, und so unser Bestreben, in genanntem Sinne etwas Brauchbares zu bieten, unterstützen zu wollen. Wir werden diesbezügliche Fingerzeige stets mit bestem Danke entgegennehmen.

Berlin, im April 1889.

Weickert und **Stolle.**

Vorwort zur zweiten und dritten Auflage.

Der schnelle Absatz der ersten und zweiten Auflage des vorliegenden Buches ist ein sicherer Beweis dafür, dafs dasselbe in Fachkreisen eine aufserordentlich günstige Aufnahme gefunden hat.

Mit dieser neuen Auflage ist eine bedeutende Erweiterung verbunden, zu welcher wir durch die vielfachen Anerkennungen von Seiten der Herren Collegen angeregt wurden.

Für diese Anerkennungen und auch für die von Seiten der Herren Lehrer uns zahlreich zugegangenen Vorschläge, welche wir bei der Neubearbeitung fast durchweg verwerten konnten, sagen wir an dieser Stelle unseren besten Dank, verbunden mit der erneuten Bitte, uns auch in Zukunft durch Anregung und Vorschläge unterstützen zu wollen.

Die stattgehabte Erweiterung bezieht sich auf mehrere neu eingefügte Kapitel, auf die mit den Lösungen versehenen Übungsbeispiele und, dank der Bereitwilligkeit unseres Herrn Verlegers, auf den ziemlich kostspieligen Abdruck der im Anhange befindlichen Tabellen. Mit letzteren und den Übungsbeispielen glauben wir denjenigen ganz besonders zu dienen, welche das Buch nicht nur zu praktischen, sondern auch zu Schulzwecken benützen.

Berlin, im März 1894, und im Dezember 1897.

Weickert und **Stolle.**

Inhaltsverzeichnis.

Erster Teil.

Allgemeine Arithmetik.

		Seite
I. Kapitel.	Vorbegriffe	1
II. „	Addition	5
III. „	Subtraktion	6
IV. „	Multiplikation	8
V. „	Division	12
VI. „	Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Gröfse	23
VII. „	Verhältnisse und Proportionen	33
VIII. „	Potenzen	36
IX. „	Wurzeln	40
	A. Allgemeines	40
	B. Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel	44

Zweiter Teil.

Allgemeine Mechanik.

Einleitung		53
I. Kapitel.	Die verschiedenen Bewegungsarten	54
	Gleichförmige Bewegung	55
II. „	Gleichförmig beschleunigte Bewegung	61
III. „	Gleichförmig verzögerte Bewegung	64
IV. „	Freier Fall der Körper	65
	Von den Kräften	67
V. „	Kräfte, welche auf einen Punkt wirken	69
VI. „	Kräfte, welche in paralleler Richtung auf einen Körper wirken	74
VII. „	Statisches Moment	78
VIII. „	Der Hebel	82
IX. „	Das Wellrad	96
X. „	Räderwerke	101
XI. „	Die Rolle	105
	1. Der Rollen- oder Potenzflaschenzug	107
	2. Der gemeine Flaschenzug	108
	3. Der Differential-Flaschenzug	110
XII. „	Die schiefe Ebene	113
XIII. „	Die Schraube	116
	Schraube ohne Ende	119

Seite

XIV. Kapitel. Die Reibung 121
1. Gleitende Reibung 121
2. Drehende- oder Zapfenreibung 124
XV. „ Zusammengesetzte Riemen- oder Räderwerke . . 127
XVI. „ Der Schwerpunkt 134
Guldin'sche Regel 135
XVII. „ Spezifisches Gewicht, absolutes Gewicht und Gewichtsberechnungen 137

Dritter Teil.

Angewandte Mechanik.

XVIII. „ Die Festigkeit 144
1. Zugfestigkeit 146
2. Druckfestigkeit 151
3. Scher- oder Schubfestigkeit 154
4. Biegungsfestigkeit 156
5. Drehungsfestigkeit 169
XIX. „ Mechanische Arbeit.
1. Arbeit im Allgemeinen 174
2. Arbeit in gegebener Zeit 177
3. Arbeit lebender Wesen 183
4. Nutzarbeit und Nebenarbeit 185
5. Arbeit der Reibung.
a) Gleitende Reibung 189
b) Zapfenreibung 189
Prony'scher Zaum 191
6. Lebendige Arbeit 193
XX. „ Berechnung der Drehbänke 195
XXI. „ Berechnung der Pumpen 205
XXII. „ Berechnung der Riemen 213
XXIII. „ Berechnung der Zahnräder 216

Anhang.

Formeln und Tabellen 227

Verzeichnis der einzelnen Tabellen.

			Seite
1.	Tabelle	verschiedener mittleren Geschwindigkeiten	59
2.	„	über den freien Fall der Körper	66
3.	„	der Reibungskoeffizienten für gleitende Reibung . .	122
4.	„	der Koeffizienten der Zugfestigkeit	147
5.	„	der Koeffizienten der Druckfestigkeit	152
6.	„	der Trägheits- und Widerstandsmomente	162
7.	„	der verschiedenen Belastungsarten und der zur Berechnung dienenden Formeln	163
8.	„	der Durchmesser schmiedeeiserner Transmissionswellen	172
9.	„	der Arbeitsfähigkeit lebender Wesen	184
10.	„	des Wirkungsgrades verschiedener Wasserräder . . .	187
11.	„	zum Gewindeschneiden, Leitspindel 4 Gang auf 1″ engl.	202
12.	„	zum Gewindeschneiden, Leitspindel ½″ engl. Ganghöhe	203
13.	„	der Schrauben und glatten Bolzen. (Preuſs. Normalien)	204
14.	„	zum Gewindeschneiden, Millimetergewinde	206
15.	„	der Riemendimensionen	214
16.	„	der Verhältnisse $\frac{t}{\pi}$ und $\frac{\pi}{t}$	218
17.	„	Umrechnungs- von preuſs. Zollen auf mm	225
18.	„	Umrechnungs- von engl. Zollen auf mm	225
19.	„	der Flächeninhalte, Oberflächen, Rauminhalte und Schwerpunktslage von Flächen und Körpern . . .	228
20.	„	der Potenzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte der Zahlen 1,0 bis 100,0	232
21.	„	der Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen 100 bis 1000	253
22.	„	der Maſse und Gewichte	262
23.	„	der spezifischen Gewichte	262

Erster Teil.

Allgemeine Arithmetik.

Erstes Kapitel.

Vorbegriffe.

1. Alles, was man vermehren oder vermindern kann, heifst Gröfse. Man nennt die Lehre, welche sich mit den Gröfsen beschäftigt, Gröfsenlehre oder Mathematik.

Einen besonderen Teil der Mathematik bildet die allgemeine Arithmetik — Buchstabenrechnung und Algebra — welche unter Zuhilfenahme einfacher Gröfsenbezeichnungen die Beziehungen, welche zwischen den gegebenen Gröfsen stattfinden, bestimmt.

2. Eine beliebige Gröfse x kann einer anderen beliebigen Gröfse y entweder gleich oder ungleich sein. Ist die Gröfse x gleich der Gröfse y, so schreibt man

$$x = y \text{ (sprich: x gleich y)},$$

nennt diese Verbindung der beiden Gröfsenzeichen x und y eine Gleichung, jede der Gröfsen x und y eine Seite der Gleichung und das Zeichen (=) das Gleichheitszeichen. Ist die Gröfse x ungleich der Gröfse y, so schreibt man

$$x > y \text{ (sprich: x gröfser y) oder}$$
$$x < y \text{ (sprich: x kleiner y)},$$

nennt diese Verbindung der beiden Gröfsenzeichen x und y eine Ungleichung, jede der Gröfsen x und y eine Seite der Ungleichung und die Zeichen (>) oder (<) Ungleichheitszeichen. Besonders zu beachten ist, dafs die Spitze des Ungleichheitszeichens stets der kleineren Gröfse zugekehrt sein mufs. Ist nicht genau festgestellt, welche der beiden Gröfsen die gröfsere ist, so schreibt man

$$x \lessgtr y \text{ (sprich: x ungleich y)}.$$

3. Sollen Gröfsen genau bestimmt werden, so giebt man sie als Vielfaches einer Einheit. Gröfsen, welche ein und dieselbe Einheit haben, werden gleichnamige oder gleichartige Gröfsen genannt.

Buchstabengröfsen sind gleichartig, wenn sie genau aus denselben Buchstaben bestehen. Diejenige Zahl, welche angiebt, wie oft eine Buchstabengröfse genommen werden soll, heifst Koeffizient.

So sind z. B. die Gröfsen $5xy$ und $8xy$ gleichartig und 5 und 8 sind ihre Koeffizienten. $36mn$ und $9ab$ sind nicht gleichartig; die Koeffizienten sind 36 und 9.

Besitzt eine Buchstabengröfse keinen Koeffizienten, so hat man stets die Zahl **1** als solchen anzunehmen. Der Koeffizient 1 wird jedoch nie geschrieben und setzt man statt $1 . x$ kurz x; statt $1 . abc$ kurz abc; statt $1 . (m + n - 3p)$ kurz $m + n - 3p$, u. s. w.

4. Eine Zahl giebt an, wie oft eine angenommene Einheit gesetzt werden soll; es ist daher jede Zahl als ein Vielfaches der Eins zu betrachten und entstehen somit die natürlichen Zahlen, indem man zur Eins noch Eins hinzufügt, zu der so erhaltenen Zahl wiederum Eins u. s. w.

Eine Zahl heifst bestimmt, wenn die Anzahl ihrer Einheiten festgestellt ist; bestimmte Zahlen werden stets mit Ziffern bezeichnet.

Eine Zahl heifst unbestimmt, wenn die Anzahl ihrer Einheiten dahingestellt bleibt; unbestimmte Zahlen werden stets mit Buchstaben bezeichnet.

Gewöhnlich benützt man die Buchstaben des lateinischen Alphabets; die ersten Buchstaben desselben A, B, C . . . . a, b, c, ... dienen zur Bezeichnung für bekannte, die letzten Buchstaben X, Y, Z . . . . x, y, z . . . . zur Bezeichnung für unbekannte Gröfsen.

5. Bildet man unter Vornahme verschiedener Manipulationen — Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren, Radizieren u. s. w. — aus gegebenen Zahlen neue, so nennt man das mit Zahlen operieren oder rechnen. Nur mit bestimmten Zahlen können alle Rechnungsarten ausgeführt werden; mit unbestimmten Zahlen kann man sie nur andeuten, d. h. ein thatsächliches Rechnen, wie es mit Ziffern stattfindet, ist mit Buchstaben nicht möglich.

Das Buchstabenrechnen bietet aber den Vorteil, dafs eine Übersichtlichkeit des gegenseitigen Zusammenhanges verschiedener Gröfsen erreicht wird, wie sie das Rechnen mit bestimmten Zahlen nie zu bieten in der Lage ist.

6. Als Gröfsenzeichen für Zahlen verwendet man allgemein Ziffern und Buchstaben.

Aufser den Gröfsenzeichen sind zum Rechnen noch Rechnungs- und Beziehungszeichen erforderlich.

Als Rechnungszeichen gelten:

$+$ bedeutet plus oder mehr (das Zeichen der Addition);

$-$ „ minus od. weniger („ „ „ Subtraktion);

. (einfacher Punkt) bedeutet mal oder multipliziert mit (das Zeichen der Multiplikation);

: und — (Doppelpunkt und Bruchstrich) bedeutet dividiert durch (das Zeichen der Division).

Beispiele: $a + b$ sprich: a plus b.

$x - y$ „ x minus y.

$c \cdot d$ „ c mal d.

$b : c$ oder $\frac{b}{c}$ „ b dividiert durch c.

Als Beziehungszeichen gelten:

$=$ das Gleichheitszeichen und

$\lessgtr$ das Ungleichheitszeichen.

Jede geordnete Zusammenstellung von Gröfsen-, Rechnungs- und Beziehungszeichen nennt man eine Formel und ist jede Formel als der Ausdruck eines mathematischen Gesetzes zu betrachten.

7. Das Additionszeichen ($+$) und das Subtraktionszeichen ($-$) finden auch noch Verwendung als Vorzeichen, um eine den Zahlen besondere Eigenschaft zum Ausdruck zu bringen.

Man unterscheidet positive und negative Zahlen.

Positive Zahlen sind solche, denen das Plus-Zeichen ($+$), negative Zahlen solche, denen das Minus-Zeichen ($-$) vorgesetzt ist. So hat z. B.

$+a$ (spr. plus a) ein positives Vorzeichen, ist daher positiv und $-a$ (spr. minus a) ein negatives Vorzeichen, ist daher negativ.

Zahlen, welche kein Vorzeichen besitzen, gelten als positive Zahlen und läfst man gewöhnlich, wenn eine positive Zahl zu Anfang eines Zahlenausdruckes oder allein steht, das Pluszeichen ($+$) vor derselben weg.

Positive und negative Zahlen werden entgegengesetzte Zahlen genannt; eine Zahl wird entgegengesetzt genommen, indem man ihr das entgegengesetzte Vorzeichen giebt.

Beispiele: Der entgegengesetzte Wert von $+a$ ist $-a$.

„ „ „ „ $-\frac{b}{c}$ „ $+\frac{b}{c}$.

„ „ „ „ $+3$ „ -3.

„ „ „ „ $-5x$ „ $+5x$.

„ „ „ $a + b$ ist $-a-b$.

„ „ „ $a - b$ „ $-a+b$.

Unter dem absoluten Wert einer Zahl versteht man die Anzahl ihrer Einheiten ohne Berücksichtigung des Vorzeichens der Zahl.

8. Soll die engere Zusammengehörigkeit mehrerer Zahlen zum Ausdruck gebracht werden, so setzt man sie in Klammern. Man unterscheidet:

$\{\ldots\}$ die geschweifte Klammer,
$[\ldots]$ die Strich-Klammer und
$(\ldots)$ die Bogen-Klammer.

Bei Anwendung mehrerer verschiedener Klammern zu gleicher Zeit ist die Anordnung stets so zu treffen, daſs die geschweifte Klammer zunächst die Strich-Klammer, diese wieder die Bogen-Klammer umfaſst.

Beispiele: $a + b - (a - b)$.

$$7x - [4y - (3y + 5z) - 3x] + 8y.$$
$$- \{a - [b + (c - d) - (e + f)] + g\}.$$

Sind wie in dem letzten Beispiel mehrere Klammern vorhanden und wünscht man die angedeuteten Rechnungen auszuführen, so müssen sämtliche Klammern entfernt, d. h. aufgelöst werden. Man beginnt stets mit dem Auflösen der inneren, hier also mit dem der Bogen-Klammern; es folgt das Auflösen der Strich-Klammer, endlich das der geschweiften Klammer.

Bei dem Auflösen von Klammern sind folgende beiden Hauptregeln besonders zu beachten:

a) Steht ein Plus-Zeichen vor der Klammer, so bleiben die Vorzeichen der Gröſsen in der Klammer unverändert.

b) Steht ein Minus-Zeichen vor der Klammer, so erhalten die Gröſsen in der Klammer entgegengesetzte Vorzeichen.

Eine weitere Berücksichtigung erfahren diese beiden wichtigen Regeln bei der Besprechung der Gesetze der Addition und Subtraktion.

1. Beispiel. $+ \{a - [b + (c - d) - (e + f)] + g\}$
Bogenklammern aufgelöst, folgt:
$+ \{a - [b + c - d - e - f] + g\}$
Strichklammer aufgelöst, folgt:
$+ \{a - b - c + d + e + f + g\}$
Geschweifte Klammer aufgelöst, folgt:
$+ a - b - c + d + e + f + g.$

2. Beispiel. $7x - [4y - (3y + 5z) - (5y - 3z)]$
Bogenklammern aufgelöst, folgt:
$7x - [4y - 3y - 5z - 5y + 3z]$
Strichklammer aufgelöst, folgt:
$7x - 4y + 3y + 5z + 5y - 3z.$

Übungsbeispiele:

$32a + 3b - (5a + 17b)$; $a + b - (2a - 3b) - (-13a + 2b)$.
$a - (b - c) - [c - (b - a)]$.
$(2a - 3b) + (-4b - 3a) - (6a - 4b) - (-5b - 2a)$.
$x - \{y + [x - (y - z - u)] - [x - y - (z - u)]\}$.

Zweites Kapitel.

Addition.

9. Das mathematische Gesetz der algebraischen Addition ist bedingt durch die Formel:

$$a + b = c.$$

Die Zahlen a und b heifsen Summanden oder Addenden, die Zahl c heifst Summe.

Es ist gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die einzelnen Summanden addiert; man wendet jedoch gern die Reihenfolge des Alphabets an. So setzt man an Stelle von

$$x + a + c - d - b + e - z$$

stets den nach dem Alphabet geordneten gleichen Wert

$$a - b + c - d + e + x - z;$$

oder an Stelle von

$3a - 9xy + 12ac - 2xz + 7abc$ den gleichen Wert
$3a + 7abc + 12ac - 9xy - 2xz.$

10. Die bei der algebraischen Addition zu beachtenden Regeln sind folgende:

1. Die Summanden sind gleichartig, d. h. sie bestehen aus denselben Zahlengröfsen oder Buchstaben-Verbindungen.

a) Haben die Summanden gleiche Vorzeichen, d. h. sind alle positiv oder alle negativ, so addiert man ihre Koeffizienten, fügt der erhaltenen Zahl die gleichartige Buchstabenverbindung hinzu und giebt der so entstandenen Summe dasselbe Vorzeichen. Z. B.

$+5 + 7 + 2 + 3 = +17.$
$+2x + 6x + 5x = (+2 + 6 + 5)x = +13x.$
$-5yz - 3yz - 8yz = -16yz.$

b) Haben die Summanden verschiedene Vorzeichen, so addiert man zunächst alle Gröfsen mit positivem, dann alle Gröfsen mit negativem Vorzeichen für sich, subtrahiert die kleinere Summe von der gröfseren, und giebt dem Rest das Vorzeichen der gröfseren Summe. Z. B.

$+5-3+7-2+4-6=+16-11=+5=5.$
$5x-7x+9x-3x+4x=+18x-10x=+8x=8x.$
$-10y+2y-16y+3y+9y=-26y+14y=-12y.$

B. Die Summanden sind ungleichartig.

In diesem Falle schreibt man der besseren Übersicht wegen die gleichartigen Gröfsen senkrecht unter einander, und führt dann die Addition, wie vorstehend angegeben, aus.

Sollen z. B. die Gröfsen: $5a-3b-4c+5d+8+a+b-2d-6+4b-c+11-x$ zu einander addiert werden, so schreibt man:

$$\begin{array}{r} 5a-3b-4c+5d+\ 8 \\ a+\ b\ \ -2d-\ 6 \\ +4b-\ c\ \ +11-x \\ \hline 6a+2b-5c+3d+13-x \end{array}$$

und erhält als die gesuchte Summe.

Übungsbeispiele:

$2a+3a+6a$; $a+2b+4a+b+5b+6a$.
$27m+13n+16p+12n+9p+6m$; $16x+13x-8x-12x$.
$22x+3y-14x-6y+9x-8y+20y$.
$3ac-12ab-9ab+7ac+22ab$.
$-3mn+5pq+23x-16pq+2xy+6x-7xy+12ab+20mn-18pq+32xy-x$.
$47x-[4y-(3x+5y)-(9y-6x)]-[8x-(3x+4y)+(5x-2y)-(7x-4y)]$.

Drittes Kapitel.

Subtraktion.

11. Das mathematische Gesetz der algebraischen Subtraktion ist bedingt durch die Formel:

$$a-b=c.$$

Die Zahl a heifst Minuend, die Zahl b heifst Subtrahend und die Zahl c bildet die Differenz oder den Rest.

Gleichartige Gröfsen werden von einander subtrahiert, indem man ihre Koeffizienten subtrahiert und zu dem Rest die gleichartige Buchstabenverbindung hinzufügt. Z. B.

$$6m-3m=(6-3)m=3m.$$

Die Subtraktion ist richtig ausgeführt, wenn sich bei der Addition des Restes zum Subtrahenden der Minuend ergiebt.

Ist $12 - 7 = 5$, so muſs $12 = 5 + 7$ sein.
„ $a - b = c$ „ „ $a = c + b$ „

Beispiele: $15x - 6x = 9x$, folglich: $15x = 9x + 6x$.

$7abc - 16abc = -9abc$, folg: $7abc = -9abc + 16abc$.

$5(y + z) - 3(y + z) = 2(y + z)$, folg: $5(y + z) = 2(y + z) + 3(y + z)$.

12. Bei der Subtraktion zweier Zahlen kann der Subtrahend entweder kleiner, gleich oder gröſser als der Minuend sein.

Ist der Subtrahend kleiner als der Minuend, so kann die Subtraktion ohne weiteres ausgeführt werden. Z. B.

$$20 - 13 = 7 \text{ oder } 12ab - 3ab = 9ab.$$
$$7(m + n) - 5(m + n) = 2(m + n).$$

Ist der Subtrahend gleich dem Minuend, so erhält man als Rest „Null". Man sagt in diesem Falle, die beiden Zahlen heben einander auf. Z. B.

$$+5 - 5 = 0 \text{ oder } 14xy - 14xy = 0.$$
$$20(x + y + z) - 20(x + y + z) = 0.$$

Ist der Subtrahend gröſser als der Minuend, so kann die Subtraktion nur soweit ausgeführt werden, als die Anzahl der Einheiten des Minuenden dies gestattet. Man erhält demnach in diesem Falle als Rest eine Zahl, welche nur soviel Einheiten hat als der Subtrahend mehr Einheiten wie der Minuend besitzt, und welcher noch die Eigenschaft weiterer Subtraktion anhaftet. Z. B.

$$8 - 14 = -6 \text{ oder } 3x - 7x = -4x.$$
$$36(f + g) - 40(f + g) = -4(f + g).$$

Auf diese Weise entsteht die negative Zahl und muſs eine negative Zahl stets subtrahiert werden, wenn man sie zu einer positiven Zahl addieren will. Z. B.

$$+6 + (-3) = 6 - 3 = 3 \text{ oder } 5z + (-16z) = 5z - 16z = -11z.$$

(Vgl. Kap. I unter 8.)

13. Soll eine mehrteilige Gröſse — Summe — von einer einfachen oder einer anderen mehrteiligen Gröſse subtrahiert werden, so muſs die zu subtrahierende mehrteilige Gröſse in Klammern gesetzt werden. Z. B.

$x - b$ subtrahiert von a giebt
$a - (x - b) = a - x + b$.

$6abc + 9xy - 3n$ subtrahiert von $12abc - 7xy$ giebt
$12abc - 7xy - (6abc + 9xy - 3n) = 12abc - 7xy - 6abc - 9xy + 3n = 6abc - 16xy + 3n$.

Es ist aus dem Vorstehenden ersichtlich, daſs es also, um zu dem Resultat zu gelangen, nur nötig ist, die Klammern entsprechend den Angaben Seite 4 unter 8b) aufzulösen. Hieraus ergiebt sich folgende wichtige Regel:

Eine Summe wird von einer Zahl oder einer anderen Summe subtrahiert, indem man jeden einzelnen Summanden subtrahiert. Z. B.

$a-(b+c-d)=a-b-c+d.$
$(a+b-c)-(d+f)=a+b-c-d-f.$ } Vergl. Seite 4 unter 8b.

Wie aus den vorstehenden Beispielen hervorgeht, hat man also nur den einzelnen Summanden der zu subtrahierenden Summe entgegengesetzte Vorzeichen zu geben und dann zu addieren; die Subtraktionsaufgabe ist somit in eine Additionsaufgabe verwandelt. Praktisch verfährt man so, dafs man die beiden Summen geordnet untereinander schreibt, den Summanden der Subtrahenden-Summe entgegengesetzte Vorzeichen giebt und die gleichartigen Gröfsen zu einander addiert.

1. Beispiel.

Minuend:	12	$-13a$	$-8x$	$3a$
Subtrahend:	-7 oder	$3a$ oder	$-17x$ oder	$-2b$
Vorzeichen entgegengesetzt:	$+$	$-$	$+$	$+$
Rest oder Differenz:	19	$-16a$	$9x$	$3a+2b.$

2. Beispiel.

Minuend:	$5a-7b+8c-6d+e$				
Subtrahend:	$4a-9b+8c-3d$			$+2f-x$	
Vorzeichen entgegengesetzt:	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$ $+$
Rest oder Differenz:	$a+2b$		$-3d+e$	$-2f+x.$	

3. Beispiel.

$$\begin{array}{r} -14b+3c-27d+3-5g \\ 7a+3b-5c-8d-12+7g \\ - \quad - \quad + \quad + \quad + \quad - \\ \hline -7a-17b+8c-19d+15-12g. \end{array}$$

4. Beispiel.

$$\begin{aligned} &2x-(6y-8z)-[x-(3y-4z)]= \\ &2x-6y+8z-[x-3y+4z]= \\ &2x-6y+8z-x+3y-4z= \\ &2x-x-6y+3y+8z-4z=x-3y+4z. \end{aligned}$$

Übungsbeispiele:

$a-(+b)$; $a-(-b)$; $x+y-(x-y)$.
$2ab-3bc-(-12ab+30xy+20bc)$.
$85m+37n-(13m-14n)-(9m-8n)$.
$-4xyz+3xy-(16yz+20xyz-12xy+3xz)$.
$a-(b-c)-[c-(b-a)]$.
$2x-8z+[6y-(4x+3z)]-(x-y-z)$.

Viertes Kapitel.

Multiplikation.

14. Das mathematische Gesetz der algebraischen Multiplikation ist bedingt durch die Formel:

$$a \cdot b = c.$$

Die Zahl a heifst Multiplikand, die Zahl b heifst Multiplikator und die Zahl c bildet das Produkt.

Multiplikand und Multiplikator nennt man auch Faktoren. Ferner heifst der Multiplikator auch noch Koeffizient, wenn er eine bestimmte, der Multiplikand aber eine unbestimmte Zahl ist. So ist z. B. in dem Produkt 5a die Zahl 5 Koeffizient.

Das Multiplikationszeichen — der einfache Punkt (.) — bleibt in der Regel zwischen unbestimmten Zahlen weg; man schreibt also nicht a . b oder (a + b) . c, sondern kurz a b oder (a + b) c. Dagegen mufs der Punkt zwischen bestimmten Zahlen stets stehen, um Verwechselungen zu vermeiden; es mufs also, wenn z. B. 6 mit 7 multipliziert werden soll, stehen 6 . 7 und nicht nur 67!

Sind die Faktoren einfache Gröfsen, so multipliziere man zunächst ihre Koeffizienten und füge der erhaltenen Zahl die vorhandenen Buchstaben, alphabetisch geordnet, hinzu. Z. B.

6x multipliziert mit 3y giebt $6x \cdot 3y = 6 \cdot 3 \cdot xy = 18xy$.

$9ab \cdot 3ac = 27aabc$.

$17mn \cdot 5x = 85mnx$.

$30xz \cdot 7xy \cdot 2ab = 420abxxyz$.

$3af \cdot 5xz \cdot 2abg = 30aabfgxz$.

15. Unter Berücksichtigung der Vorzeichen gelten bei dem algebraischen Multiplizieren folgende Gesetze:

$$(+a)(+b) = +ab$$
$$(+a)(-b) = -ab$$
$$(-a)(+b) = -ab$$
$$(-a)(-b) = +ab \qquad \text{d. h.}$$

Das Produkt zweier Gröfsen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, dagegen mit entgegengesetzten Vorzeichen negativ.

Das Produkt beliebig vieler positiver Faktoren, und das einer geraden Anzahl negativer Faktoren ist positiv; dagegen das Produkt einer ungeraden Anzahl negativer Faktoren, negativ.

Beispiele: $(-5a) \cdot 20bc = -100abc$ oder $7a \cdot (-10mn) = -70amn$.

$(-ab)(-ac) = aabc$ oder $(-3xyz)(-5m) = 15mxyz$.

$(-a)(-a)(-a) = -aaa$.

$(-xy)(-xy)(-xy)(-xy) = xxxxyyyy$.

$(-a)(+b)(-c)(+d)(-e)(-f) = abcdef$.

$(-x)(+b)(-y)(+n)(-z) = -bnxyz$.

Multipliziert man eine Zahl oder einen Zahlenausdruck überhaupt, mit Null, so ist das Produkt ebenfalls Null. Z. B.

$5 \cdot 0 = 0$ oder $a \cdot 0 = 0$; $6abx \cdot 0 = 0$ oder $(a + b) \cdot 0 = 0$.

16. Besonders zu beachten sind folgende Hauptregeln:

Eine Summe wird mit einer positiven Zahl multipliziert, indem man unter Beibehaltung der Vorzeichen die einzelnen Summanden mit dieser Zahl multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.

Beispiele: $(a + b - c)\,d = ad + bd - cd$.

$(5a + 3b - 3c)\,4d = 20ad + 12bd - 12cd$.

$2xy - yz + n(b - c + x) = 2xy - yz + bn - cn + nx$.

Ist die Zahl, mit welcher eine Summe zu multiplizieren ist, eine negative Zahl, so sind die Vorzeichen der einzelnen Summanden bei der Multiplikation in die entgegengesetzten zu verwandeln. Ist z. B. $(a + b - c)$ zu multiplizieren mit $(- d)$, so ist zu schreiben:

$$(a + b - c)(- d) = a(- d) + b(- d) + (- c)(- d)$$
$$= - ad - bd + cd.$$

$$(4xy + 3yz - 9xz)(- 2ab) = - 8abxy - 6abyz + 18abxz.$$

Eine Summe wird mit einer anderen Summe multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem Summanden der anderen Summe multipliziert und die so erhaltenen Produkte addiert.

Ergeben sich hierbei gleichartige Gröfsen, so werden dieselben zusammengefafst.

1. Beispiel. $(a + b - c)$ soll mit $(d - e)$ multipliziert werden. Man multipliziere zunächst $(a + b - c)$ mit d, so erhält man $(a + b - c)\,d = ad + bd - cd$. Nun multipliziere man $(a + b - c)$ mit $(- e) = - ae - be + ce$. Addiert man die erhaltenen Produkte und schreibt man der besseren Übersicht wegen das Ganze in Form einer Gleichung, so folgt:

$$(a + b - c)(d - e) = ad + bd - cd - ae - be + ce.$$

2. Beispiel.

$$(3a + 5b - 2c)(- 3x + 4yz + 1) = - 9ax - 15bx + 6cx + 12ayz + 20byz$$
$$- 8cyz + 3a + 5b - 2c.$$

3. Beispiel.

$$(7a - 2b - 9)(3a - 11b) = 21aa - 6ab - 27a - 77ab + 22bb + 99b$$
$$= 21aa - 83ab - 27a + 22bb + 99b.$$

4. Beispiel.

$$(a + b + c)(a + b - c) = aa + ab + ac + ab + bb + bc - ac - bc - cc$$
$$= aa + 2ab + bb - cc.$$

Übungsbeispiele:

$3a(4a + 5b) - 6b(7a - 9b)$; $(x - y)(c + d)$.
$(9x - 11y)(13x - 7y)$.
$(2mn - 3)(4ax + 5m - 7)$.
$(4ab + 9ac + 12bc)(2ab + 3ac - 6bc)$.
$(2a + 7b)(9a - 5b) - (6a - 4b)(2a + 11b)$.
$(4x - 2y)(3x - 6z)(7x + 8)$.
$(2ab + 3bc - 6cd)(5ab - 2bc)(4ab - bc)$.
$(12xyz - 3mn)(6x - 2z)(3xy - 5mn + 7)$.

17. Ebenso oft als der Fall eintritt, eine mehrteilige Gröfse mit einer anderen zu multiplizieren, kommt der umgekehrte Fall vor: eine mehrteilige Gröfse in Faktoren zu zerlegen.

Haben mehrere Produkte einen oder mehrere Faktoren gemeinschaftlich, so kann man diesen resp. diese als gemeinschaftlichen Faktor herausschreiben.

1. Beispiel. Gegeben: $ab + ac$; der gemeinschaftliche Faktor soll herausgeschrieben werden. — Die Produkte ab und ac sind beide positiv und zu addieren; sie haben a als Faktor gemeinsam, a mufs demnach herausgeschrieben werden. Dies geschieht, indem man b und c, verbunden durch das Additionszeichen, in eine Klammer setzt, welche a als Faktor erhält, d. h.

$$ab + ac = a(b + c).$$

Die Richtigkeit ist sofort erwiesen, wenn man die rechte Seite der so entstandenen Gleichung ausmultipliziert.

2. Beispiel. $6a + 12ab - 54acx = 6a(1 + 2b - 9cx)$.

$$\frac{xz}{3} - \frac{yz}{3} = \frac{z}{3}(x - y).$$

Ist das erste mehrerer Produkte, aus denen ein gemeinschaftlicher Faktor herausgeschrieben werden soll, mit einem Minuszeichen behaftet, so setze man nach diesem Minuszeichen zunächst eine Klammer, in welche dann alle Produkte des gemeinschaftlichen Faktors mit entgegengesetztem Vorzeichen aufzunehmen sind. Aus dem auf diese Weise entstandenen Klammerwert ist dann erst der gemeinschaftliche Faktor herauszuschreiben. Z. B.

$x - yz - ya + yb = x - (yz + ya - yb) = x - y(z + a - b)$.

Multipliziert man jetzt den Ausdruck $x - y(z + a - b)$ aus, so ist die Richtigkeit auch hier sofort erwiesen.

3. Beispiel.

$5ax - 3by + 6bz = 5ax - (3by - 6bz) = 5ax - 3b(y - 2z)$.

$m - na - nb + nc = m - (na + nb - nc) = m - n(a + b - c)$.

Übungsbeispiele:

$7a + 7b$; $ax - bx + cx - dx$; $abx + aby - abz$.

$25xy + 30mn - 45ab$; $a(b + c) + d(b + c) = (a + d)(b + c)$.

$a(x - y) - b(x - y)$; $(x + y)(a + 2b) + (x + y)(3a + 5b)$.

$7a + 18xy + 27xz = 7a + 9x(2y + 3z)$; $12m - 14ab + 21ac$.

$24ap - 36aq - 35rx - 42ry$.

$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d)$.

$pr - ps - qr + qs$; $2ax + 3bx - 2ay - 3by$.

$u + cx - cy + dx - dy + ex - ey$.

18. Sehr häufig tritt der Fall ein, dafs sich in einem Produkt ein und dieselbe Zahl mehreremale als Faktor befindet, d. h. mehreremale mit sich selbst multipliziert werden soll. So erscheint z. B. in dem Zahlenausdruck $6aaabb$ die Zahl a dreimal und die Zahl b zweimal als Faktor.

Der Kürze und besseren Übersicht wegen bringt man die wiederholte Multiplikation einer Zahl mit sich selbst dadurch zum Ausdruck, dafs man die Zahl nur einmal schreibt und sie oben rechts mit einer anderen, gewöhnlich etwas kleiner geschriebenen Zahl versieht, welche angiebt, wie oft die erstere Zahl mit sich selbst zu multiplizieren ist. Soll demnach a fünfmal als Faktor gesetzt werden, so schreibt man

nicht a.a.a.a.a sondern kurz a^5.

Umgekehrt bedeutet natürlich a^4 soviel als a.a.a.a.

19. Der Ausdruck x^n zeigt allgemein an, dafs die Zahl x n-mal als Faktor zu setzen ist. Man nennt den Ausdruck x^n eine Potenz der Zahl x und sagt, man potenziere x mit n, oder, man habe x zur n-ten Potenz erhoben. Für x^n sagt man auch kurz: x hoch n.

Die Zahl x, welche potenziert wird, heifst Grundzahl oder Basis; die Zahl n, mit welcher man potenziert, Exponent der Potenz.

Grundzahl kann jeder beliebige Zahlenausdruck sein; als mehrteilige Gröfse ist derselbe jedoch stets in Klammern zu setzen. Soll z. B. von $a + b + c$ die zweite Potenz gebildet werden, so schreibt man $(a + b + c)^2$.

Die zweite Potenz einer Zahl nennt man deren Quadrat, die dritte Potenz deren Kubus.

20. Folgende wichtigen Formeln müssen gut eingeprägt werden, da namentlich die unter 1) und 3) angeführten für das praktische Ausziehen der Quadrat- und Kubik-Wurzel von besonderer Wichtigkeit sind:

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
4) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.
5) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

In Worten würde man die rechte Seite der Gleichung unter 4) folgendermafsen ausdrücken: a zur dritten, minus 3 a Quadrat mal b, plus 3 a mal b Quadrat, minus b zur Dritten.

Die Richtigkeit der z. B. unter 2) gegebenen Formel wird folgendermafsen durch Rechnung bewiesen:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = aa - ab - ab + bb$$
$$= a^2 - 2ab + b^2.$$

Auf dieselbe Weise sind die anderen Formeln leicht auf ihre Richtigkeit zu prüfen.

Übungsbeispiele:

$(x + y)^2$; $(m + n)(m - n)$; $(2a + 5b)^2 = 4a^2 + 20ab + 25b^2$.
$(7a - 9b)^2$; $(m + 1)^2$; $(5x + 3y)^2 + (2x - 4y)^2$.
$(2x + 3y)(2x - 3y)$; $(5a - 7b)(5a + 7b)$.
$(3a + 8b)^2 + (4a + 6b)^2 - (5a - 10b)^2$.
$(x + y)^3$; $(m - n)^3$; $(p + 1)^3$; $(2x - 3y)^3$; $(4ab + 2bc)^3$.

Fünftes Kapitel.

Division.

21. Das mathematische Gesetz der algebraischen Division ist bedingt durch die Formel:

$$\frac{a}{b} = c.$$

Die Zahl a heifst Dividend, die Zahl b heifst Divisor und die Zahl c bildet den Quotienten.

Die Division ist richtig ausgeführt, wenn Quotient und Divisor mit einander multipliziert den Dividenden als Produkt ergeben.

Ist $\frac{a}{b} = c$, so mufs $a = b \cdot c$ sein.

Beispiele: $\frac{12}{3} = 4$, denn $12 = 3 \cdot 4$; oder $\frac{8a}{2} = 4a$, denn $8a = 2 \cdot 4a$; oder $\frac{6(a+b)}{3(a+b)} = 2$, denn $6(a+b) = 2 \cdot 3(a+b)$.

22. Bezüglich der Vorzeichen gelten bei der Division die bereits bei der Multiplikation unter 15, Seite 9 gegebenen Gesetze:

Der Quotient zweier Gröfsen mit gleichen Vorzeichen ist positiv, dagegen mit entgegengesetzten Vorzeichen negativ, d. h.

$$\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$$
$$\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$$
$$\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$$
$$\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}.$$

23. Eine eigentliche Division, wie sie mit bestimmten Zahlen ausgeführt werden kann, ist mit Buchstabenausdrücken — so lange der Dividend nicht ein Produkt des Divisors ist, und wenn von den Koeffizienten abgesehen wird — nicht möglich. Die Division kann nur angedeutet werden und schreibt man die bei der Division in Betracht zu ziehenden Gröfsenausdrücke gewöhnlich in Bruchform. Soll z. B. die Division von $a - b$ durch $a + b$ angedeutet werden so schreibt man $\frac{a-b}{a+b}$; ist die Division praktisch auszuführen, so wendet man folgende Schreibweise an: $(a - b) : (a + b)$, liest aber in beiden Fällen: $a - b$ dividiert durch $a + b$.

24. Ist der Dividend gleich dem Divisor, so heben sich die in denselben enthaltenen Zahlenausdrücke gegen einander und wird hier der Quotient stets $= 1$. Z. B.

$\frac{7}{7} = 1$, denn $7 = 1 \cdot 7$; $\frac{ab}{ab} = 1$, denn $ab = 1 \cdot ab$.

$$\frac{ab(x+y)}{ab(x+y)} = 1; \quad \frac{x+y+z-a}{x+y+z-a} = 1.$$

Ist der Dividend ein Vielfaches des Divisors, so ist die Division auch ohne weiteres möglich und geht dieselbe dann ohne Rest auf. Haben hierbei Dividend und Divisor Faktoren gemeinschaftlich, so heben sich diese gegenseitig. Z. B.

$$\frac{12}{4} = 3, \text{ denn } 12 = 4 \cdot 3.$$

$$\frac{ac}{c} = a, \text{ denn } ac = c \cdot a = ac.$$

$\frac{12ab}{3ab} = 4$, denn $4 \cdot 3ab = 12ab$.

$\frac{15ax}{3a} = 5x$, denn $5x \cdot 3a = 15ax$.

$\frac{2mnx}{3mmnx} = \frac{2}{3m}$; $\frac{16xyy}{12yz} = \frac{4xy}{3z}$.

$\frac{ab}{6a} = \frac{b}{6}$; $\frac{(m+n)(p-q)}{p-q} = m+n$.

$\frac{ab(f+g)}{2b(f+g)} = \frac{a}{2}$; $\frac{x(y+z)}{x(y-z)} = \frac{y+z}{y-z}$.

$\frac{-16a}{8b} = -\frac{2a}{b}$; $\frac{8fmn}{-2fgm} = -\frac{4n}{g}$.

$\frac{-12abcde}{-8acd} = \frac{3be}{2}$; $\frac{36aabbcfg}{-27abccghk} = -\frac{4abf}{3chk}$.

Sind Dividend und Divisor so beschaffen, dafs die Division nicht ohne Rest möglich ist, so wird der Quotient eine Zahl, welcher noch die Eigenschaft weiterer Division anhaftet.

Eine solche Zahl heifst ein Bruch oder eine gebrochene Zahl.

Bei dem Rechnen mit algebraischen Brüchen gelten dieselben Regeln wie bei dem Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen. (Siehe Seite 17 unter 26.)

25. Folgende wichtigen Regeln sind besonders zu beachten:

Ist der Dividend eine algebraische Summe, der Divisor eine ganze Zahl, so führt man die Division aus, indem man jeden einzelnen Summanden durch diese Zahl dividiert und die so erhaltenen Quotienten, entsprechend den Vorzeichen der einzelnen Summanden, zu einander addiert. Z. B.

$\frac{m+n}{3} = \frac{m}{3} + \frac{n}{3}$; $\frac{x-y}{a} = \frac{x}{a} - \frac{y}{a}$.

$\frac{ab+ac-ad}{a} = \frac{ab}{a} + \frac{ac}{a} - \frac{ad}{a} = b+c-d$.

$\frac{a+b-c+d}{f} = \frac{a}{f} + \frac{b}{f} + \frac{-c}{f} + \frac{d}{f} = \frac{a}{f} + \frac{b}{f} - \frac{c}{f} + \frac{d}{f}$.

$\frac{-a+b+c-d}{-n} = \frac{-a}{-n} + \frac{+b}{-n} + \frac{+c}{-n} + \frac{-d}{-n} = \frac{a}{n} - \frac{b}{n} - \frac{c}{n} + \frac{d}{n}$.

$\frac{8axy+10ax}{5ax} = \frac{8axy}{5ax} + \frac{10ax}{5ax} = \frac{8y}{5} + 2 = 2 + 1\frac{3}{5}y$.

$\frac{12acfg-4afg+5fgh}{4abfg} = \frac{12acfg}{4abfg} - \frac{4afg}{4abfg} + \frac{5fgh}{4abfg}$

$= \frac{3c}{b} - \frac{1}{b} + \frac{5h}{4ab}$.

Ist der Dividend eine algebraische Summe und der Divisor desgleichen, so kann man zweierlei Wege einschlagen:

a) Den der Faktorenzerlegung.

Hierbei vereinfacht man die Zahlenausdrücke im Dividenden und im Divisor dadurch, dafs man nach dem auf Seite 10 unter 17) angegebenen Verfahren gemeinschaftliche Faktoren herausschreibt. Haben Dividend und Divisor gleiche Faktoren, so heben sich dieselben gegenseitig. Z. B.

$$\frac{9a-9b}{3a-3b}=\frac{9(a-b)}{3(a-b)}=\frac{9}{3}=3.$$

$$\frac{ab+ac}{fb+fc}=\frac{a(b+c)}{f(b+c)}=\frac{a}{f}.$$

$$\frac{ax-a}{a-ay}=\frac{a(x-1)}{a(1-y)}=\frac{x-1}{1-y}.$$

$$\frac{aa+a}{1-aa}=\frac{a(a+1)}{(1+a)(1-a)}=\frac{a}{1-a}.$$ (Vgl. Kap. IV unter 20; 5.)

$$\frac{n-nn}{3an-3ann}=\frac{n(1-n)}{3an(1-n)}=\frac{1}{3a}.$$

Übungsbeispiele:

$$\frac{ax+xx}{3bx+cx};\quad \frac{14aa-7ab}{10ac-5bc};\quad \frac{ac-bcx-cz}{9bcz-cz};\quad \frac{6ac+9bc-5cc}{12adf+18bdf-10cdf}$$

$$\frac{5aa-5ax}{aa-xx};\quad \frac{6ac+10bc+9ad+15bd}{6cc+9cd-2c-3d}.$$

Diese Methode erfordert jedoch sehr viel Übung und lassen sich allgemeine Regeln für dieselbe nur schwer geben.

b) Den der Partial-Division.

Hierbei verfährt man allgemein — genau wie bei natürlichen Zahlen — folgendermafsen: Man ordnet die Glieder des Dividenden und des Divisors in alphabetischer Reihenfolge und dividiert das erste Glied des Dividenden durch das erste Glied des Divisors; das erhaltene Resultat bildet das erste Glied des Quotienten. Mit diesem multipliziert man den ganzen Divisor und subtrahiert das so erhaltene Produkt vom Dividenden. Zu dem entstandenen Rest nimmt man von der Dividenden-Summe neue Glieder herunter, und dividiert nun wieder mit dem ersten Gliede des Divisors in das erste Glied des Restes; das erhaltene Resultat bildet das zweite Glied des Quotienten. So lange noch Glieder aus der Dividenden-Summe heruntergenommen werden können, ist das Verfahren in gleichem Sinne fortzusetzen.

Diese Methode ist die leichtere und auch am meisten angewandte.

1. Beispiel.

Dividend.	Divis.	Quotient.
$(ac - bc + ad - bd)$	$: (a - b)$	$= c + d.$
$ac - bc$	Subtrahend	
$- \quad +$	Vorzeichen umgekehrt	
„ „ $+ ad - bd$	Rest oder neuer Dividend	
$ad - bd$	Subtrahend	
$- \quad +$	Vorzeichen umgekehrt	
„ „	Rest.	

2. Beispiel.

$(14af - 21bf + 7cf + 6ag - 9bg + 3cg) : (7f + 3g) = 2a - 3b + c.$

$14af \quad + 6ag$

$- \quad -$

„ $- 21bf + 7cf$ „ $- 9bg + 3cg$

$- 21bf \quad - 9bg$

$+ \quad +$

„ $+ 7cf \quad + 3cg$

$+ 7cf \quad + 3cg$

$- \quad -$

„ „

3. Beispiel.*)

$(4xxx + 4xx - 29x + 21) : (2x - 3) = 2xx + 5x - 7.$

$4xxx - 6xx \quad = 2x^2 + 5x - 7.$

$- \quad +$

„ $+ 10xx - 29x + 21$

$+ 10xx - 15x$

$- \quad +$

„ $- 14x + 21$

$- 14x + 21$

$+ \quad -$

4. Beispiel.*)

$(6bb - bc - cc + bx) : (3b + c) = 2b - c.$

$6bb + 2bc$

$- \quad -$

„ $- 3bc - cc + bx$

$- 3bc - cc$

$+ \quad +$

„ „ Rest $+ bx.$

Die Division geht hier nicht auf, der Rest bx wäre demnach noch durch $(3b + c)$ zu dividieren. Bricht man die Division hier ab, so sind Rest und Divisor in Bruchform dem bis jetzt erhaltenen Quotienten $(2b - c)$ anzuhängen und heifst letzterer nunmehr:

$$2b - c + \frac{bx}{3b + c}.$$

5. Beispiel.*)

$1 : (1 - b) = 1 + b + bb + bbb + \ldots .$

$1 - b \quad = 1 + b + b^2 + b^3 + \ldots .$

$- \quad +$

$+ b$

$+ b - bb$

$- \quad +$

$+ bb$

$+ bb - bbb$

$- \quad +$

$+ bbb$ u. s. w. bis ins Unendliche.

*) Die in diesen Beispielen erscheinenden Potenzen sind der gröfseren ichkeit wegen als einzelne Faktoren geschrieben.

Wie man sieht, wird hier die Division nie aufgehen, man kann demnach dieselbe unendlich weit und lange fortsetzen.

Übungsbeispiele:

(ac + bc + ad + bd) : (a + b); (aa + 2ab + bb — cc) : (a + b).
(12 mm — 51 mn — 24 mp + 54 nn + 48 np) : (3 m — 6 n).
(35 aa + 24 ab — 15 ac + 4 bb — 6 bc) : (5 a + 2 b); (xxx + yyy) : (x + y).
(2 aa + 5 ab — 2 bb + 9 ac + 9 bc + 9 cc) : (2 a + b + 3 c).
(xx — yy — 2 yz — zz) : (x — y — z).
(60 abb + 125 aaa — 8 bbb — 150 aab) : (5 a — 2 b).

26. Ist man gezwungen mit algebraischen Brüchen zu rechnen — eine in der Praxis sehr oft auftretende Notwendigkeit — so verfahre man genau nach den für das Rechnen mit gewöhnlichen Brüchen aufgestellten Grundregeln, jedoch unter Berücksichtigung der Vorzeichen. (Vergl. Seite 9 und 13 unter 15 und 22.)

Ein einfacher algebraischer Bruch hat die Form: $\frac{a}{b}$ oder $\frac{ax}{by}$.

„ zusammengesetzter „ „ „ „ „ $\frac{a+b}{b-c}$ und

eine gemischte algebraische Zahl „ „ „ $a \pm \frac{bc}{d-f}$

(in welchem letzten Falle a stets eine ganze Zahl sein mufs).

Die wichtigsten Regeln sind folgende:

In einem Bruche kann man Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl multiplizieren oder durch ein und dieselbe Zahl dividieren, ohne dafs sich der Wert des Bruches ändert. Z. B.

$$\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{15}{24}; \text{ oder } \frac{27}{51} = \frac{27:3}{51:3} = \frac{\frac{27}{3}}{\frac{51}{3}} = \frac{9}{17}.$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m}; \text{ oder } \frac{a}{b} = \frac{a:n}{b:n} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}.$$

$$\frac{m+n}{n-m} = \frac{(m+n)x}{(n-m)x}; \quad \frac{a+b}{f-g} = \frac{(a+b):(x-y)}{(f-g):(x-y)}.$$

Im ersten Falle sagt man, man erweitere, im zweiten Falle, man kürze den Bruch.

Ein Bruch, dessen Zähler und Nenner wieder Brüche sind, heifst ein Doppelbruch. (Siehe obige Beispiele.)

Brüche sind entweder gleichnamig oder ungleichnamig. Sie sind gleichnamig, wenn sie ein und denselben Nenner haben; ungleichnamig, wenn dies nicht der Fall ist.

Gleichnamige Brüche sind z. B.

$\frac{3}{20}$ und $\frac{17}{20}$; $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$; $\frac{mn}{xy}$ und $\frac{pq}{xy}$; $\frac{fg}{n+m}$ und $\frac{x-y-z}{n+m}$.

Ungleichnamige Brüche sind:

$\frac{5}{8}$ und $\frac{3}{7}$; $\frac{a}{b}$ und $\frac{b}{c}$; $\frac{rs}{x+z}$ und $\frac{pq}{y-x}$.

Ungleichnamige Brüche müssen, ehe man mit denselben rechnen kann, gleichnamig gemacht werden.

Ungleichnamige Brüche werden gleichnamig gemacht, indem man ihren Haupt- oder Generalnenner feststellt. Alsdann dividiert man mit dem Nenner jedes einzelnen Bruches in diesen Generalnenner, und multipliziert mit dem so erhaltenen Quotienten den zu dem betreffenden Nenner gehörenden Zähler. Die erhaltenen Produkte bilden dann die Zähler der gleichnamig gemachten Brüche, deren gemeinschaftlicher Nenner nun der General-Nenner wird.

Unter dem Generalnenner versteht man im allgemeinen diejenige kleinste Zahl, in welcher alle Nenner gleichnamig zu machender Brüche ohne Rest enthalten sind.

Sind z. B. als Nenner die Zahlen 5 und 7 gegeben, so ist der Generalnenner = 35, denn 5 und 7 gehen bei der Division in 35 ohne Rest auf. Sind die Zahlen 4, 6 und 20 als Nenner gegeben, so ist 60 der Generalnenner, als kleinste Zahl, in welcher 4, 6 und 20 ohne Rest enthalten sind. Für die Nenner 3, 9, 7 und 14 ist als kleinste Zahl 126 der Generalnenner u. s. w.

Bei Buchstabengröfsen, welche als Nenner gleichnamig zu machen sind, ist genau ebenso die kleinste Zahl zu suchen, in welcher alle Nenner ohne Rest enthalten sind. Für die Nenner a und b ist a b und für die Nenner a, b und c ist a b c der Generalnenner. Die Gröfsen a b, a c, a d und a e haben die Zahl a b c d e als Generalnenner, denn sie sind alle ohne Rest in der Zahl a b c d e enthalten u. s. w.

1. Beispiel. Die Brüche $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{12}$ sollen gleichnamig gemacht werden. — Der Generalnenner ist = 36; dividiert man mit dem Nenner 9 des ersten Bruches in den Generalnenner, so erhält man als Quotienten $\frac{36}{9} = 4$. Multipliziert man mit 4 den Zähler 5 und setzt man unter das erhaltene Produkt $4 \cdot 5 = 20$ den Generalnenner 36, so erhält man an Stelle des Bruches $\frac{5}{9}$ den Bruch $\frac{20}{36}$. Verfährt man mit dem zweiten Bruch $\frac{7}{12}$ auf gleiche Weise, so erhält man an dessen Stelle den Bruch $\frac{21}{36}$. Die Brüche $\frac{5}{9}$ und $\frac{7}{12}$ ergeben gleichnamig gemacht somit die Werte $\frac{20}{36}$ und $\frac{21}{36}$.

2. Beispiel. Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sollen gleichnamig gemacht werden. — Der Generalnenner ist = b d; dividiert man mit dem Nenner b des ersten Bruches in den General-Nenner, so erhält man als Quotienten d. Multipliziert man mit d den Zähler a und setzt man unter das erhaltene Produkt a d den Generalnenner b d, so erhält man an Stelle des Bruches $\frac{a}{b}$ den Bruch $\frac{ad}{bd}$. Verfährt man mit dem zweiten Bruch $\frac{c}{d}$ auf gleiche

Weise, so erhält man an dessen Stelle den Bruch $\frac{bc}{bd}$. Die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ ergeben gleichnamig gemacht somit die Werte $\frac{ad}{bd}$ und $\frac{bc}{bd}$.

3. Beispiel. Die Brüche $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$ sind gleichnamig zu machen. Generalnenner = bdfh. Folglich wird:

$$\frac{a}{b} = \frac{adfh}{bdfh}; \quad \frac{c}{d} = \frac{cbfh}{bdfh}; \quad \frac{e}{f} = \frac{ebdh}{bdfh} \text{ und } \frac{g}{h} = \frac{gbdf}{bdfh}.$$

Übungsbeispiele: Es sind gleichnamig zu machen:

$\frac{a}{b}$ und $\frac{x}{y}$; $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$; $\frac{1}{ab}$ und $\frac{1}{cd}$; $\frac{x}{u}, \frac{y}{v}$ und $\frac{z}{w}$; $\frac{x}{pq}$ und $\frac{y}{q}$.

$\frac{a}{xyz}, \frac{b}{yz}$ und $\frac{c}{z}$; $\frac{3a}{4b}, \frac{5f}{8g}$ und $\frac{x}{7y}$; $\frac{af}{4bg}, \frac{5cd}{12bh}$ und $\frac{2}{3}$; $\frac{a}{4bcd}, \frac{h}{2bcg}$ und $\frac{3}{4}$.

$\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$; $\frac{x}{a-b}$ und $\frac{y}{c}$; $\frac{17x-4y}{11x}$ und $\frac{3y-5x}{13y}$.

$\frac{a-b}{b}$ und $\frac{b}{a+b}$; $\frac{5a+7b}{2a-3b}$ und $\frac{2a+3b}{5a-7b}$.

Eine gemischte Zahl wird in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt, indem man die ganze Zahl mit dem Nenner des zugehörigen Bruches multipliziert, die so erhaltene Zahl zu dem Zähler des Bruches addiert und das Ganze durch den Nenner des Bruches dividiert.

$$*)3 + \tfrac{1}{2} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{2} = \frac{7}{2}.$$

$$a + \frac{x}{y} = \frac{ay + x}{y}.$$

$$x - \frac{a-b}{c} = \frac{xc - (a-b)}{c} = \frac{-a+b+cx}{c}.$$

$$x + y + \frac{a}{b-c} = \frac{(x+y)(b-c)+a}{b-c} = \frac{bx+by-cx-cy+a}{b-c}.$$

Übungsbeispiele: Es sind in gewöhnliche Brüche zu verwandeln:

$a + \frac{b}{c}$; $h + \frac{3a}{5b}$; $x + \frac{1}{c}$; $1 - \frac{m}{n}$; $3 + \frac{4a-5b}{2a+3b}$.

$x - \frac{xx+2xy+yy}{x+y}$; $\frac{(a-b)^2}{4ab} - 1$; $1 + \frac{(a+b)^2}{4ab}$.

$x - y - \frac{a}{b+c}$; $a - b + c - \frac{x-y}{n+m}$.

Gleichnamige Brüche werden allgemein addiert oder subtrahiert, indem man ihre Zähler addiert oder subtrahiert und der erhaltenen Zahl den gemeinschaftlichen Nenner unterschreibt. Z. B.

$$\frac{3}{18} + \frac{8}{18} = \frac{3+8}{18} = \frac{11}{18}; \quad 6\tfrac{1}{3} - 1\tfrac{1}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

*) Bei den aus bestimmten Zahlen gebildeten gemischten Zahlen läfst man das Additionszeichen zwischen der ganzen Zahl und dem Bruch gewöhnlich weg; schreibt also nicht $3 + \frac{1}{2}$, sondern stets $3\frac{1}{2}$.

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c};\quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

$$\frac{5}{z}-\frac{4}{z}=\frac{5-4}{z}=\frac{1}{z};\quad \frac{16ab}{8xy}+\frac{b+c}{8xy}=\frac{16ab+b+c}{8xy}.$$

Übungsbeispiele:

$$\frac{6a}{11x}+\frac{7a}{11x};\quad \frac{17m}{20y}-\frac{13m}{20y}+\frac{21m}{20y}-\frac{19m}{20y}.$$

$$\frac{2m+5n}{x+y}+\frac{7m-9n}{x+y}+\frac{11m-8n}{x+y};\quad \frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}.$$

$$\frac{ac-by}{ac}+\frac{cx}{ac}+\frac{by}{ac};\quad 9a+\frac{3x}{4y}-\frac{7z}{4y};\quad 27p-\frac{11n}{r+s}-\frac{15b}{r+s}.$$

Ungleichnamige Brüche werden allgemein addiert oder subtrahiert, indem man sie gleichnamig macht und dann wie gleichnamige Brüche addiert oder subtrahiert. Z. B.

$$\frac{3}{7}+\frac{5}{8}=\frac{24}{56}+\frac{35}{56}=\frac{24+35}{56}=\frac{59}{56}=1\tfrac{3}{56}.$$

$$\frac{5}{6}-\frac{7}{12}=\frac{10}{12}-\frac{7}{12}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}.$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

$$\frac{x}{y}+\frac{x+y}{nz}=\frac{nxz}{nyz}+\frac{(x+y)\,y}{nyz}=\frac{nxz+y\,(x+y)}{nyz}.$$

$$\frac{9a+5b}{5}-\frac{6a-3b}{3}=\frac{3\,(9a+5b)}{15}-\frac{5\,(6a-3b)}{15}$$

$$=\frac{3\,(9a+5b)-5\,(6a-3b)}{15}=\frac{27a+15b-30a+15b}{15}$$

$$=\frac{-3a+30b}{15}=\frac{3(-a+10b)}{15}=\frac{-a+10b}{5}.$$

$$\frac{x}{y}-\frac{x+y}{ab}=\frac{xab}{yab}-\frac{y(x+y)}{yab}=\frac{abx-xy-yy}{aby}$$

$$=\frac{x\,(ab-y)-y^2}{aby}.$$

Übungsbeispiele:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y};\quad \frac{1}{ab}-\frac{1}{cd};\quad \frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{c};\quad \frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}.$$

$$\frac{13a-5b}{4}-\frac{7a-2b}{6}-\frac{3a}{5};\quad \frac{17x-4y}{11x}-\frac{3y-5x}{13y};\quad \frac{x}{pq}+\frac{y}{q}.$$

$$\frac{a}{xyz}+\frac{b}{yz}+\frac{c}{z};\quad \frac{3a+2b}{c}-\frac{5bd-2a-3d}{4cd};\quad \frac{x}{a-b}+\frac{y}{c}.$$

$$\frac{6a+3b}{4a}+\frac{5b}{2a-6b};\quad \frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y};\quad \frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}.$$

$\frac{5a+7b}{2a+3b} - \frac{2a+3b}{5a-7b}$; $\frac{7x}{13y} + \frac{8y}{5x} + \frac{12xx-63yy}{65xy}$.

$\frac{3xx-2x+1}{4x-3} - \frac{2xx+3x-4}{3x-6}$.

Brüche werden mit einander multipliziert, indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. Z. B.

$$\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8} = \frac{5.3}{8.8} = \frac{15}{64}; \quad \frac{6}{7}\cdot\frac{3}{11} = \frac{18}{77}.$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}; \quad \frac{ab}{c}\cdot\frac{e}{fg} = \frac{abe}{cfg}.$$

$$\frac{7abc}{6mn}\cdot\frac{16mnx}{14ayz} = \frac{7.16.abcmnx}{6.14mnayz} = \frac{4bcx}{3yz}.$$

Übungsbeispiele:

$\frac{1}{x}\cdot\frac{6x}{z}\cdot\frac{z}{3x}$; $\frac{8mn}{xy}\cdot\frac{15mx}{6ac}$; $\frac{2ax}{3}\cdot\frac{5ax}{9bc}$; $\frac{35abc}{36pqr}\cdot\frac{16qrs}{35acd}$; $\frac{24a}{25b}\cdot\frac{4y}{3x}\cdot\frac{5by}{6ax}$.

$\left(\frac{3ab}{4x} - \frac{7bc}{4y} + \frac{12cd}{5z}\right)\cdot\frac{80xx}{63abcd}$; $\left(\frac{4a+5b}{3a-2b} - \frac{4a-5b}{3a+2b}\right)\cdot\frac{9a-4b}{16a-25b}$.

$\left(\frac{2a}{3b} - \frac{3b}{4a}\right)\left(\frac{3a}{4b} + \frac{2b}{3a}\right) - \left(\frac{a}{6b} - \frac{b}{8a}\right)\left(\frac{a}{2b} - \frac{b}{3a}\right)$.

$\left(\frac{x}{a+x} + a\right)\left(\frac{a}{a-x} - x\right)$; $\left(\frac{a}{a+x} + x\right)\left(\frac{x}{a-x} - a\right)$.

Soll ein Bruch durch einen anderen Bruch dividiert werden, so kehre man den Divisorbruch um und multipliziere die beiden Brüche. Z. B.

$$\frac{4}{5} : \frac{7}{9} = \frac{4}{5}\cdot\frac{9}{7} = \frac{4.9}{5.7} = \frac{36}{35}.$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

$$\frac{5ax}{9by} : \frac{7pq}{11rs} = \frac{5ax}{9by}\cdot\frac{11rs}{7pq} = \frac{55arsx}{63bpqy}.$$

$$\left(x+\frac{b}{c}\right) : \left(b-\frac{x}{d}\right) = \left(\frac{xc+b}{c}\right) : \left(\frac{bd-x}{d}\right)$$

$$= \frac{cx+b}{c}\cdot\frac{d}{bd-x} = \frac{cdx+bd}{bcd-cx}.$$

Übungsbeispiele:

$\frac{5am}{bc} : \frac{15mx}{6ac}$; $\frac{2mn}{3} : \frac{2mn}{3bc}$; $\frac{26xyz}{45pqr} : \frac{39xyz}{40pqr}$; $\frac{13abbc}{20xxy} : \frac{30xyyz}{52bccn}$.

$\frac{5ab(m-n)}{6xy(m+n)} : \frac{10ax(m-n)}{3by(m+n)}$; $\left(\frac{5x}{8u} + 12xu - \frac{9u}{16x}\right) : \frac{15x}{32u}$.

$\frac{n}{m} : \frac{ma}{m+n+p}$; $\frac{a+x}{a-x} : \frac{ax+xx}{ax-xx}$; $\left(\frac{5abc}{12pqr}\cdot\frac{40xpr}{25bxc}\right) : \frac{5abcxp}{25bqr}$.

$\left(\frac{2mn}{6abc} : \frac{18mnp}{3bcx}\right)\cdot\frac{7pq}{9ab}$.

Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert resp.

durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler resp. Nenner mit dieser Zahl multipliziert. Z. B.

$$\frac{9}{11} \cdot 3 = \frac{9 \cdot 3}{11} = \frac{27}{11}; \quad \frac{13}{30} : 5 = \frac{13}{30 \cdot 5} = \frac{13}{150}.$$

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b} \text{ und } \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}.$$

$$3abc \cdot \frac{7pq}{9abc} = \frac{3abc \cdot 7pq}{9abc} = \frac{3 \cdot 7abcpq}{9abc} = \frac{7pq}{3}.$$

$$\frac{x+y}{x-y} : x+y = \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x-y}.$$

Übungsbeispiele:

$\frac{15xyz}{23pqr} \cdot 17prs$; $\frac{1}{aa} \cdot a$; $\frac{32ab}{27(x-y)} \cdot 36(x-y)$; $\left(\frac{11x}{12y} + \frac{5xx}{4yy} - \frac{7xxx}{8y}\right) \cdot 4ab$.

$\frac{x}{y} : z$; $\frac{15ab}{16xy} : 2abc$; $\frac{3aabb}{5xyy} : 9aabx$; $\frac{a+x}{3} : \frac{a+x}{3}$; $7ax : \frac{14ax}{5by}$.

27. Zerlegt man eine Zahl oder einen Zahlenausdruck in mehrere gleiche Faktoren, so bezeichnet man das hierbei einzuschlagende Verfahren mit dem Ausdruck Wurzelausziehen oder Radizieren und nennt den gesuchten Faktor Wurzel. Zerlegt man eine Zahl in 2, 3 oder mehr gleiche Faktoren, so erhält man entsprechend die 2te, 3te oder eine noch höhere Wurzel.

Das Zeichen $\sqrt{}$ (verzogenes r von dem lateinischen radix = Wurzel) heifst das Wurzelzeichen und erstreckt sich der horizontale Strich desselben stets ganz über den zu radizierenden Zahlenausdruck. Die winkelartige Öffnung im senkrechten Teil des Wurzelzeichens dient zur Aufnahme der Zahl — des Exponenten — die angiebt, welche Wurzel aus der unter dem ganzen Zeichen stehenden Zahl gezogen werden soll. Die zweite Wurzel aus einer Zahl a nennt man Quadratwurzel und schreibt dieselbe kurz $\sqrt{a}$ d. h. ohne Exponenten. Die dritte Wurzel heifst Kubik-Wurzel.

Demnach bedeutet $\sqrt[3]{64}$ die 3te Wurzel aus der Zahl 64, d. h. die Zahl 4, welche dreimal als Faktor gesetzt die Zahl 64 ergiebt, denn es ist $4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$.

Allgemein gelten folgende Begriffe:

Aus einer Zahl a die n^{te} Wurzel $= (\sqrt[n]{a})$ ziehen — oder was dasselbe ist: eine Zahl a durch eine Zahl n radizieren — heifst, eine Zahl x suchen, welche mit n potenziert wieder die Zahl a ergiebt. Z. B.

Ist $\sqrt[n]{a} = x$, so mufs $x^n = a$ sein.

„ $\sqrt[3]{125} = 5$ „ „ $5^3 = 125$ „ .

„ $\sqrt[4]{16} = 2$ „ „ $2^4 = 16$ „ .

Die zu radizierende Zahl a heifst Radikand, die Zahl n heifst Wurzelexponent und die Zahl x bildet die Wurzel.

Unter Berücksichtigung des auf Seite 11 unter 18) Gesagten ersieht man auf den ersten Blick, wie innig die Operationen des Potenzierens und Radizierens mit einander in Zusammenhang stehen. Man merke daher folgenden wichtigen Satz:

Wird eine Zahl zu gleicher Zeit mit einer anderen Zahl potenziert und radiziert, so bleibt die Zahl unverändert, d. h.

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \text{ oder was dasselbe ist } (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

$$\sqrt[5]{x^5} = x; \quad \sqrt[3]{(a+b)^3} = a + b.$$

Im Anschlufs an das in den vorstehenden Kapiteln Gebotene mögen hier noch einige algebraische Werte in Gestalt von Formeln aufgeführt werden, gegen welche im praktischen Rechnen von dem weniger Geübten sehr oft und sehr arg verstofsen wird:

1) $a + 0 = a.$
2) $a - 0 = a.$
3) $a \cdot 0 = 0.$
4) $\frac{a}{0} = \infty.$ (Das Zeichen des unendlich Grofsen, d. h. der Wert Null ist in jedem anderen Zahlenwert unendlich viele Male enthalten.)
5) $\frac{0}{a} = 0.$
6) $\frac{0}{0} = a = 7 = 5 = 100$, d. h. Null dividiert durch Null kann jeden beliebigen Zahlenwert ergeben.

Die Richtigkeit der vorstehenden Formeln folgt ohne weiteres aus den Proben der Subtraktion und Division.

Sechstes Kapitel.

Einfache Gleichungen mit einer unbekannten Gröfse.

28. Unter einer Gleichung versteht man allgemein die Verbindung zweier Gröfsenbezeichnungen durch das Gleichheitszeichen. Die rechts resp. links vom Gleichheitszeichen stehenden Zahlenausdrücke nennt man die rechte resp. linke Seite der Gleichung. (Vergl. Seite 1 unter 2.)

Sind die Seiten einer Gleichung so beschaffen, daſs die eine durch Umformung des Zahlenausdruckes der anderen entstanden ist, so heiſst die Gleichung eine **analytische Gleichung oder eine Formel.** (Vergl. S. 3 unter 6.) Z. B. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Bestehen die Seiten einer Gleichung aus Zahlenausdrücken, welche von einander unabhängig sind, so entsteht die **algebraische** Gleichung. Z. B.

$$5x + 4 = a + \frac{3x}{b}.$$

29. Soll eine Gleichung unter Vornahme gewisser Rechnungs-Operationen umgeformt werden, so ist **ein und dieselbe Operation stets mit beiden Seiten** einer Gleichung vorzunehmen.

30. Folgende Operationen kann man mit einer Gleichung vornehmen, **ohne daſs sich der Wert derselben ändert:**

a) Die Seiten einer Gleichung können mit einander vertauscht werden.

Ist $5 = 3 + 2$, so ist auch $2 + 3 = 5$.
„ $a = b - c$ „ „ „ $b - c = a$.
Ist $\frac{xy}{mn} + a = \frac{p+q}{r+s}$ „ „ „ $\frac{p+q}{r+s} = \frac{xy}{mn} + a$.

b) Auf beiden Seiten einer Gleichung kann man ein und dieselbe Zahl addieren resp. subtrahieren.

Ist $4 + 3 = 9 - 2$, so ist auch $4 + 3 \pm 5 = 9 - 2 \pm 5$.
„ $a = b$ „ „ „ $a \mp x = b + x$ und
$a - x = b - x$.
„ $a + b = c + d$ „ „ „ $a + b - \frac{x}{y} = c + d - \frac{x}{y}$.

c) Beide Seiten einer Gleichung kann man mit ein und derselben Zahl multiplizieren resp. durch ein und dieselbe Zahl dividieren.

Ist $8 = 2 \cdot 4$, so ist auch $2 \cdot 8 = 2 \cdot 2 \cdot 4$ und $\frac{8}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2}$.
„ $a = b + c$ „ „ „ $an = (b + c)n$ „ $\frac{a}{n} = \frac{b+c}{n}$.
„ $\frac{p}{q} = \frac{x+y}{x-y}$ „ „ „ $\frac{p}{qn} = \frac{x+y}{(x-y)n}$.

d) Beide Seiten einer Gleichung kann man mit ein und derselben Zahl potenzieren resp. durch ein und dieselbe Zahl radizieren.

Ist $25 = 5 \cdot 5$, so ist auch $25^2 = (5 \cdot 5)^2$ und $\sqrt{25} = \sqrt{5 \cdot 5}$.
„ $a + b = c$ „ „ „ $(a + b)^2 = c^2$ „ $\sqrt[3]{a + b} = \sqrt[3]{c}$.

e) Ist die eine Seite einer Gleichung ein Produkt, so kann man jeden Faktor desselben als Divisor auf die andere Seite der Gleichung bringen. (Vergl. Seite 12 unter 21.)

Ist $3 \cdot 7 = 21$, so ist auch $3 = \frac{21}{7}$ und $7 = \frac{21}{3}$.

„ $a = b \cdot c$ „ „ „ $\frac{a}{b} = c$ „ $\frac{a}{c} = b$.

„ $(m+n)x = z$ „ „ „ $m+n = \frac{z}{x}$ und $x = \frac{z}{m+n}$.

f) Ist eine Seite einer Gleichung ein Quotient, so kann man den Divisor desselben als Faktor auf die andere Seite der Gleichung bringen. (Vergl. Seite 12 unter 21.)

Ist $\frac{36}{4} = 9$, so ist auch $36 = 9 \cdot 4$.

„ $\frac{a-b}{c} = d+e$, so ist auch $a - b = (d+e)c$.

g) Jedes Glied der einen Seite einer Gleichung kann man mit entgegengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite bringen.

Ist $5 + 11 - 3 = 6 + 7$, so ist auch $5 + 11 = 6 + 7 + 3$,
oder $5 + 11 - 3 - 7 = 6$,
oder $5 = 6 + 7 - 11 + 3$ u. s. w.

„ $a - b = c + \frac{d}{2}$, so ist auch $a = c + \frac{d}{2} + b$,

oder $\frac{d}{2} = a - b - c$,

oder $c = a - b - \frac{d}{2}$ u. s. w.

Ist $n - (a+b)c = x + y$, so ist auch $n = x + y + (a+b)c$,
oder $y = n - (a+b)c - x$,
oder $-(a+b)c = -n + x + y$ u. s. w.

h) Alle Glieder der einen Seite einer Gleichung kann man mit entgegengesetzten Vorzeichen auf die andere Seite bringen, wodurch in der neu entstandenen Gleichung eine Seite gleich Null wird.

Ist $12 - 7 + 3 = 6 + 2$, so ist auch $12 - 7 + 3 - 6 - 2 = 0$.
„ $a + b - c = d - e + f$ „ „ „ $a + b - c - d + e - f = 0$.

i) Auf beiden Seiten einer Gleichung kann man die Vorzeichen in die entgegengesetzten verwandeln. Man sagt in diesem Falle, man habe die Gleichung mit (-1) multipliziert.

Ist $9 - 10 + 13 = 5 - 11 + 18$, so ist auch $-9 + 10 - 13 = -5 + 11 - 18$
„ $a - b + c = d - e$, so ist auch $(a - b + c)(-1) = (d - e)(-1)$, d. h.
$-a + b - c = -d + e$.

31. Bei der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mehrerer Gleichungen untereinander ist folgendes zu beachten:

a) Eine Gleichung wird zu einer anderen Gleichung addiert, indem man sowohl die beiden linken Seiten als auch die beiden rechten Seiten zu einander addiert und die so erhaltenen Summen durch ein Gleichheitszeichen verbindet.

1. Beispiel.

$$\begin{aligned} 5+7&=9+3 \quad \ldots\ldots \text{ I)}\\ 8+11&=17+2 \quad \ldots\ldots \text{ II)}\\ \hline \text{I}+\text{II}):\ 5+7+8+11&=9+3+17+2. \end{aligned}$$

2. Beispiel.

$$\begin{aligned} a+b+x&=n-m \quad \ldots\ldots \text{ I)}\\ p-q&=r+s \quad \ldots\ldots \text{ II)}\\ \hline \text{I}+\text{II}):\ a+b+p-q+x&=n-m+r+s. \end{aligned}$$

3. Beispiel.

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{n}&=a-\frac{p+q}{r} \quad \ldots\ldots \text{ I)}\\ z&=\frac{c}{d}+m \quad \ldots\ldots \text{ II)}\\ \hline \text{I}+\text{II}):\ \frac{x-y}{n}+z&=a+\frac{c}{d}+m-\frac{p+q}{r}. \end{aligned}$$

b) Eine Gleichung wird von einer anderen Gleichung subtrahiert, indem man die linke Seite der einen von der linken Seite der anderen, und entsprechend die rechte Seite der einen von der rechten Seite der anderen Gleichung subtrahiert. Die erhaltenen Differenzen sind durch das Gleichheitszeichen zu verbinden.

1. Beispiel.

$$\begin{aligned} 5+7&=9+3 \quad \ldots\ldots \text{ I)}\\ 8+11&=17+2 \quad \ldots\ldots \text{ II)}\\ \hline \text{I}-\text{II}):\ 5+7-8-11&=9+3-17-2. \end{aligned}$$

2. Beispiel.

$$\begin{aligned} a+b+x&=n-m \quad \ldots\ldots \text{ I)}\\ p-q&=r+s \quad \ldots\ldots \text{ II)}\\ \hline \text{I}-\text{II}):\ a+b+x-p+q&=n-m-r-s. \end{aligned}$$

c) Eine Gleichung wird mit einer anderen Gleichung multipliziert, indem man sowohl die beiden linken Seiten als auch die beiden rechten Seiten mit einander multipliziert und die so erhaltenen Produkte durch ein Gleichheitszeichen verbindet.

1. Beispiel.

$$\begin{aligned} 3\,.\,5&=15 \quad \ldots\ldots \text{ I)}\\ 30&=3\,.\,10 \quad \ldots\ldots \text{ II)}\\ \hline \text{I}\,.\,\text{II}):\ 3\,.\,5\,.\,30&=15\,.\,3\,.\,10. \end{aligned}$$

2. Beispiel. $n + m = p + q \ldots\ldots I)$
$a = b - c \ldots\ldots II)$

$I . II): (n + m)\,a = (p + q)(b - c)$ oder
$an + am = bp + bq - cp - cq.$

3. Beispiel. $\frac{a}{b} - \frac{3}{4} = c + \frac{n}{m} \ldots\ldots I)$
$\frac{x + y}{z} = r - s \ldots\ldots II)$

$$I . II): \left(\frac{a}{b} - \frac{3}{4}\right)\frac{x + y}{z} = \left(c + \frac{n}{m}\right)(r - s).$$

d) Eine Gleichung wird durch eine andere Gleichung dividiert, indem man die linke Seite der einen durch die linke Seite der anderen, und entsprechend die rechte Seite der einen durch die rechte Seite der anderen Gleichung dividiert. Die erhaltenen Quotienten sind durch das Gleichheitszeichen zu verbinden.

1. Beispiel. $7 + 9 = 10 + 6 \ldots\ldots I)$
$8 = 2 \cdot 4 \ldots\ldots II)$

$$\frac{I}{II}): \frac{7 + 9}{8} = \frac{10 + 6}{2 \cdot 4}.$$

2. Beispiel. $a + b + x = n - m \ldots\ldots I)$
$p - q = r + s \ldots\ldots II)$

$$\frac{I}{II}): \frac{a + b + x}{p - q} = \frac{n - m}{r + s}.$$

3. Beispiel. $\frac{a + b}{n} = p + q \ldots\ldots I)$
$\frac{r - s}{m} = \frac{x}{y} \ldots\ldots II)$

$$\frac{I}{II}): \frac{a + b}{n} \cdot \frac{m}{r - s} = (p + q)\frac{y}{x}.*)$$

32. Jede aus einer Gleichung durch Rechnung zu entwickelnde Gröfse heifst die unbekannte Gröfse, oder kurz die Unbekannte. Man bezeichnet dieselbe gewöhnlich durch die Buchstaben x, oder y, oder z.

Soll aus einer algebraischen Gleichung eine Zahl x, welche in derselben ein oder mehreremale vorkommt, entwickelt, d. h. soll die Gleichung nach x aufgelöst werden, so mufs man eine andere algebraische Gleichung

*) Vergl. Seite 21 unter 26; Division von Brüchen.

bilden, welche die Zahl x nur als Faktor zu einer Seite hat. Die ursprüngliche Gleichung mufs also auf die Form

$$ax = b$$

gebracht werden, wo unter a und b beliebige Zahlenausdrücke zu verstehen sind. Um dies zu erreichen, mufs man die Gleichung ordnen.

33. Das Ordnen der Gleichungen geschieht am kürzesten unter Vornahme der hierzu notwendigen Operationen in nachstehender Reihenfolge:

a) Man suche die Gleichung dadurch zu vereinfachen, dafs man Glieder der einen Seite gegen gleiche Glieder der anderen Seite hebt; oder dadurch, dafs man alle Glieder der Gleichung durch ein und dieselbe Zahl (einen gemeinschaftlichen Faktor) dividiert.

b) Man schaffe, wenn Brüche in der Gleichung auftreten, alle Nenner fort, indem man jedes Glied der Gleichung mit dem Generalnenner aller vorkommenden Nenner multipliziert.

c) Man löse alle Klammern auf, in denen die Unbekannte enthalten ist. (Hierbei ist besonders auf die Vorzeichen zu achten. Vergl. Seite 4 unter 8, a und b.)

d) Man schaffe alle Wurzeln fort, welche die Unbekannte als Radikanden enthalten, indem man das Glied mit der Wurzel zu einer Seite der Gleichung macht und diese mit dem Wurzelexponenten potenziert.

e) Man schaffe alle Glieder, welche mit der Unbekannten behaftet sind, auf die eine Seite, alle übrigen Glieder auf die andere Seite der Gleichung, wobei wiederum besonders auf die Vorzeichen zu achten ist. Alsdann fasse man alle Glieder mit der Unbekannten zusammen, indem man die Unbekannte als gemeinschaftlichen Faktor herausschreibt. Den Wert der Unbekannten erhält man, indem man nun beide Seiten der Gleichung durch den Faktor der Unbekannten dividiert.

34. Folgende Beispiele werden die Anwendung der einzelnen Regeln leicht verständlich machen:

1. Beispiel. $6x - 6 = 18$. Glied mit x auf eine Seite, folgt:
$6x = 18 + 6$ oder
$6x = 24$. Beide Seiten durch 6 dividiert:
$\frac{6x}{6} = \frac{24}{6}$ oder
$x = 4$.

2. Beispiel. $ax + b = c$. Glied mit x auf eine Seite, folgt:
$ax = c - b$. Beide Seiten durch a dividiert:
$x = \frac{c - b}{a}$.

3. Beispiel.

$3a+x-5b+2=7b-a+c+6$. Glied mit x auf eine Seite, folgt:

$$x=7b-a+c+6-3a+5b-2.$$
$$=12b-4a+c+4.$$
$$=-4a+12b+c+4.$$

4. Beispiel. $8x-5=13-7x$. Glieder mit x auf eine Seite:

$8x+7x=13+5$. Jetzt x herausgeschrieben, folgt:

$$x(8+7)=18.$$
$$15x=18.$$
$$x=\frac{18}{15}=\frac{6}{5}=1\tfrac{1}{5}.$$

5. Beispiel. $\frac{x}{6}+4=7$. Glied mit x auf eine Seite, folgt:

$$\frac{x}{6}=7-4 \text{ oder}$$
$$\frac{x}{6}=3. \text{ Beide Seiten mit 6 multipliziert:}$$
$$\frac{6x}{6}=3\,.\,6 \text{ oder}$$
$$x=18.$$

6. Beispiel. $\frac{x}{a}-(a+b)=c.$

$$\frac{x}{a}=c+(a+b).$$
$$x=(a+b+c)\,a.$$

7. Beispiel. $12+\frac{4x}{10}=28.$

$$\frac{4x}{10}=28-12=16. \text{ Nenner fortgeschafft:}$$
$$4x=16\,.\,10=160. \text{ Beide Seiten durch 4 dividiert:}$$
$$x=\frac{160}{4}=40.$$

8. Beispiel. $9(2x-7)=5(4x-15)$. Klammern aufgelöst:

$$18x-63=20x-75.$$
$$18x-20x=-75+63.$$
$$-2x=-12. \text{ Vorzeichen umgekehrt:}$$
$$2x=12.$$
$$x=6.$$

9. Beispiel. $\frac{4x-7}{1+x}=3$. Nenner fortgeschafft, folgt:

$$4x-7=3(1+x)=3+3x.$$
$$4x-3x=3+7.$$
$$x=10.$$

10. Beispiel. $\frac{3x}{4} - \frac{2x}{5} = 14.$ Generalnenner = 20; jedes Glied der Gleichung damit multipliziert, folgt:

$$\frac{3x}{4} \cdot 20 - \frac{2x}{5} \cdot 20 = 14 \cdot 20.$$
$$15x - 8x = 280.$$
$$7x = 280.$$
$$x = 40.$$

11. Beispiel.

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7x - 712 + \frac{x}{5}.$$

Jedes Glied der Gleichung mit Generalnenner = 60 multipliziert, folgt:

$$30x + 20x + 15x = 420x - 42720 + 12x.$$
$$30x + 20x + 15x - 420x - 12x = -42720.$$
$$-367x = -42720.$$

Auf beiden Seiten der Gleichung die Vorzeichen entgegengesetzt genommen:

$$367x = 42720.$$
$$x = \frac{42720}{367} = 116\tfrac{148}{367} = 116{,}4032 \ldots$$

12. Beispiel. $\frac{2-5x}{5x+1} + \frac{7+x}{3-2x} = \frac{148-5x^2}{3+13x-10x^2} - 2.$

Der Generalnenner ist: $(5x+1)(3-2x) = 3+13x-10x^2.$

Multipliziert man alle Glieder der Gleichung mit diesem, so folgt:

$$(2-5x)(3-2x) + (7+x)(5x+1) = 148 - 5x^2 - 2(3+13x-10x^2).$$
$$6 - 15x - 4x + 10x^2 + 35x + 5x^2 + 7 + x = 148 - 5x^2 - 6 - 26x + 20x^2.$$

Glieder mit x auf eine Seite gebracht:

$$10x^2 + 5x^2 + 5x^2 - 20x^2 - 15x - 4x + 35x + x + 26x = 148 - 6 - 6 - 7.$$

Da sich die Glieder mit x^2 heben, so folgt:

$$43x = 129.$$
$$x = \frac{129}{43} = 3.$$

13. Beispiel. $9 - \frac{128}{x} = 5.$ Nenner fortgeschafft:

$$9x - 128 = 5x.$$
$$9x - 5x = 128.$$
$$4x = 128.$$
$$x = 32.$$

14. Beispiel. $\frac{6}{x} + 7 = 64 - \frac{32}{x}.$ Generalnenner = x, also:

$$6 + 7x = 64x - 32.$$
$$7x - 64x = -32 - 6.$$
$$57x = 38.$$
$$x = \frac{38}{57} = \frac{2}{3}.$$

15a. Beispiel. $\sqrt[m]{x} = a$. Beide Seiten mit m potenziert:

$$(\sqrt[m]{x})^m = a^m \quad \text{folglich:}$$

$$x = a^m. \quad \text{(Vergl. Kap. V unter 27.)}$$

15b. Beispiel. $\sqrt{16} = 4$. Beide Seiten mit 2 potenziert:

$$(\sqrt{16})^2 = 4^2 \text{ d. h.}$$

$$16 = 4^2 = 4 \cdot 4 = 16.$$

15c. Beispiel. $\sqrt[3]{125} = 5$.

$$\left(\sqrt[3]{125}\right)^3 = 5^3.$$

$$125 = 5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125.$$

Vergl. Kap. V u. Kap. IV unter 27 und 18.

16. Beispiel. $\sqrt[m]{ax+b} = \sqrt[m]{cx+d}$. Beide Seiten mit m potenziert:

$$ax + b = cx + d.$$

$$ax - cx = d - b.$$

$$x(a - c) = d - b.$$

$$x = \frac{d-b}{a-c}.$$

17. Beispiel. $\dfrac{2 - 2\sqrt{x}}{2 - 3\sqrt{x}} = \dfrac{2 + 2\sqrt{x}}{5 + 3\sqrt{x}}$. Beide Seiten durch 2 dividiert:

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{2 - 3\sqrt{x}} = \frac{1 + \sqrt{x}}{5 + 3\sqrt{x}}.$$ Generalnenner = $(2 - 3\sqrt{x})(5 + 3\sqrt{x})$ folglich:

$$(1 - \sqrt{x})(5 + 3\sqrt{x}) = (1 + \sqrt{x})(2 - 3\sqrt{x}).$$

$$5 - 5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = 2 + 2\sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}.$$

Da sich auf beiden Seiten $-3\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$ hebt, so folgt:

$$5 - 2\sqrt{x} = 2 - \sqrt{x}.$$ Glieder mit x auf eine Seite:

$$-2\sqrt{x} + \sqrt{x} = 2 - 5.$$

$$-\sqrt{x} = -3.$$ Vorzeichen umgekehrt, folgt:

$$+\sqrt{x} = +3.$$ Beide Seiten mit 2 potenziert:

$$(\sqrt{x})^2 = 3^2.$$

$$x = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9.$$

Da häufig genug die Gleichungen nicht immer in so einfacher Form, wie in den vorstehenden Beispielen erscheinen, sondern dieselben erst nach besonderen gegebenen Bedingungen aufgestellt werden müssen, so mögen hier der Vollständigkeit wegen einige sogenannte „eingekleidete Gleichungen“ folgen:

18. Beispiel. Das 2fache, 3fache und 7fache einer Zahl addiert ist = 96; wie heifst die Zahl?

Lösung: Bezeichnet man die zu ermittelnde Zahl vorläufig mit x, so ist das 2fache derselben = 2x, das 3fache = 3x und das 7fache = 7x. Addiert man diese 3 Werte und setzt ihre Summe entsprechend der Bedingung der Aufgabe = 96, so folgt:

$$2x + 3x + 7x = 96 \text{ und damit}$$

$$x = 8.$$

19. Beispiel. Subtrahiert man von dem 8. Teil einer gewissen Zahl den Bruch $^4/_5$, so entsteht die Zahl 18. Wie heifst die Zahl?

Lösung: Bezeichnet man die zu bestimmende Zahl mit x, so ist der 8. Teil derselben $= \frac{x}{8}$; davon $\frac{4}{5}$ abgezogen und die Differenz gleich 18 gesetzt, giebt:

$$\frac{x}{8} - \frac{4}{5} = 18 \text{ und damit}$$
$$x = 150{,}4.$$

20. Beispiel. Drei Personen, A, B und C sollen 72 Mark so unter sich teilen, dafs B zweimal so viel wie A, und C dreimal so viel wie B erhält. Wie viel bekommt jeder?

Lösung: Setzt man die Summe, welche A erhält $= x$, so erhält B das doppelte, also $= 2x$ und C das dreifache von B, also $= 3 \,.\, 2x = 6x$; mithin mufs sein:

$$x + 2x + 6x = 72 \text{ und damit}$$
$$x = 8. \text{ Hieraus ergiebt sich:}$$

A	erhält	= 8	Mark.
B	„	= 16	„
C	„	= 48	„
	Summa	= 72	Mark.

21. Beispiel. Ein Arbeiter kann eine bestimmte Arbeit in 12 Tagen leisten, ein anderer kann es schon in 6 Tagen. Wie viel Tage brauchen beide, wenn sie zusammen arbeiten?

Lösung: Setzt man die zu leistende Arbeit $= 1$, so schafft der Arbeiter, welcher in 12 Tagen fertig wird, in einem Tage $^1/_{12}$ dieser Arbeit und ebenso der andere in einem Tage $^1/_6$, also beide zusammen $^1/_{12} + {}^1/_6 = {}^3/_{12} = {}^1/_4$ dieser Arbeit. Setzt man nun die Zeit, welche beide zusammen zur Vollendung der Arbeit brauchen $= x$, so folgt:

$$^1/_4\, x = 1 \text{ und damit}$$
$$x = 4 \text{ Tage.}$$

22. Beispiel. Eine Wasserhebemaschine kann ein Stück Land in 20 Tagen entwässern, eine zweite kann dies in 30 Tagen und eine dritte braucht nur 10 Tage. Wieviel Zeit ist erforderlich, wenn alle 3 Maschinen zu gleicher Zeit arbeiten?

Lösung: Man setze die zu hebende Wassermasse $= 1$. Da nun die erste Maschine diese in 20 Tagen heben würde, so hebt sie in einem Tage $^1/_{20}$ derselben. Die zweite Maschine hebt pro Tag $^1/_{30}$ und die dritte $^1/_{10}$; alle drei zusammen heben also an einem Tage

$$^1/_{20} + {}^1/_{30} + {}^1/_{10} = {}^3/_{60} + {}^2/_{60} + {}^6/_{60} = {}^{11}/_{60}, \text{ folglich}$$

in x Tagen $= {}^{11}/_{60} \,.\, x$, mithin mufs

$$^{11}/_{60} \,.\, x = 1 \text{ sein, d. h.}$$
$$x = 5{}^5/_{11} \text{ Tage.}$$

23. Beispiel. Ein Meister nimmt einen Gesellen an und verspricht ihm für jeden Tag, den er bei ihm arbeitet, 1 Mark. Arbeitet er nicht, so mufs er dem Meister 60 Pfg. $= {}^{60}/_{100}$ Mark für Kost zahlen. Nach 80 Tagen halten sie Abrechnung und es findet sich, dafs keiner dem anderen etwas schuldig ist. Wieviel Tage hat der Geselle gearbeitet?

Lösung: Setzt man die Tage, welche der Geselle gearbeitet hat $= x$, so sind $80 - x$ die Tage, welche er nicht gearbeitet hat; sein Lohn beträgt alsdann x Mark und das Kostgeld dementsprechend $(80 - x)\, {}^{60}/_{100}$ Mark; da nun der Lohn durch das Kostgeld aufgezehrt sein soll, so mufs sein:

$$x - \frac{(80 - x) \,.\, 60}{100} = 0 = \text{Null und damit}$$
$$x = 30 \text{ Tage.}$$

Übungsbeispiele:

$3x + 4 = 13$; $793 - 19x = 14$; $9x + 13 = 7x + 91$.
$15 - 27x = 36 - 34x$; $ax + b = c$; $m - nx = px - q$.
$3(x + 1) = 5(x - 1)$; $ax + b(x - c) = ac$.
$4[8x - 5(7 - 4x) + 9(6 - 3x) + 12x] =$
$= 7[16x - 2(7x - 10) + 4x - 2]$.
$\frac{75}{x} = 3$; $a + \frac{b}{x} = c$; $x + \frac{2}{3}x = 25$; $\frac{1}{4}x + 3 = \frac{2}{9}x + 4$.
$\frac{x-7}{9} + \frac{x-4}{5} = 9$; $\frac{x+3}{2} - \frac{x+7}{3} + 4 = \frac{x+11}{4}$.
$\frac{5x+2}{6} + \frac{7x+1}{5} = \frac{2x-1}{3} + \frac{5x-2}{2}$; $\frac{x+\frac{1}{2}}{2} + \frac{x+\frac{3}{4}}{5} = \frac{4x+1}{4}$
$(7x + 1)(9x - 5) + (9x - 29)(25 - 3x) = (6x + 10)^2$.
$\frac{x+12}{x+4} = \frac{x+3}{x-1}$; $\frac{3x+2}{4a-5b} = \frac{2x-5}{8a-3b}$; $\frac{x}{a} - 1 - \frac{dx}{c} + 3ab = 0$.
$\frac{14(x+2)}{x} - 2x + 1 = 7 + 4(3 - \frac{1}{2}x)$.

Weitere Beispiele bietet in reichlicher Fülle der II. Teil des Buches: „Mechanik."

Siebentes Kapitel.

Verhältnisse und Proportionen.

35. Vergleicht man zwei Zahlen a und b in Bezug auf ihre Gröfse mit einander, so findet man das Verhältnis, in welchem sie zu einander stehen. Die Vergleichung kann auf zweierlei Art geschehen, je nachdem man die Differenz $a - b$ feststellt — um wieviel Einheiten die eine Zahl gröfser ist als die andere — oder dadurch, dafs man den Quotienten $a : b$ oder $\left(\frac{a}{b}\right)$ feststellt — wievielmal die eine Zahl gröfser ist als die andere, d. h. wie oft die eine in der anderen enthalten ist. Die letztgenannte Art der Vergleichung ist die in der Praxis gebräuchliche und soll deshalb nur diese hier weiter besprochen werden.

36. Die Zahlenausdrücke $a - b$ und $a : b$ heifsen allgemein Verhältnisse; in beiden nennt man a das Vorderglied und b das Hinterglied.

Stehen zwei Zahlen a und b in demselben Verhältnis zu einander wie zwei andere Zahlen c und d, d. h. geben a durch b, und c durch d dividiert ein und denselben Quotienten,

so kann man aus diesen beiden gleichen Verhältnissen folgende Gleichung bilden:

$$a : b = c : d \text{ und liest alsdann:}$$

a verhält sich zu b wie c zu d.

Es möge an dieser Stelle gleich vorausgeschickt sein, dafs die Verhältnisse einer Proportion demnach als gleiche Brüche angesehen werden können, infolgedessen man auch diese Verhältnisse gewöhnlich in Bruchform schreibt. Z. B.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, wobei man ebenfalls liest:

a verhält sich zu b wie c zu d.

Aus dem Gesagten folgt, dafs für die Verhältnisse dieselben Regeln gelten, welche in Kap. V unter 26) speziell für Brüche angeführt sind.

37. Eine Gleichung, deren Seiten aus 2 gleichen Verhältnissen bestehen, nennt man eine Proportion. In der Proportion

$$a : b = c : d$$

werden a und d die äufseren, b und c die inneren Glieder genannt. Sind die inneren Glieder einer Proportion gleich, d. h. ist $a : b = b : c$, so heifst die Proportion eine stetige und b die mittlere Proportionale zwischen a und c.

38. In jeder Proportion ist das Produkt der inneren Glieder gleich dem Produkt der äufseren Glieder; d. h.

Ist $4 : 6 = 10 : 15$, so ist auch $6 \cdot 10 = 4 \cdot 15$.

„ $a : b = c : d$ „ „ „ $b \cdot c = a \cdot d$.

Dieser wichtige Satz ist besonders einzuprägen, da man mit Hilfe desselben erstens jede Proportion sofort auf ihre Richtigkeit prüfen und zweitens ein etwa unbekanntes Glied derselben berechnen kann.

1. Beispiel. Bezeichnet man das unbekannte Glied mit x, so findet man aus der Proportion

$x : 5 = 12 : 3$ unter Anwendung obigen Satzes:

$3 \cdot x = 5 \cdot 12$ und damit

$$x = \frac{5 \cdot 12}{3} = \frac{60}{3} = 20.$$

Setzt man, um die Probe zu machen, den Wert von $x = 20$ in die gegebene Proportion ein, so folgt:

$20 : 5 = 12 : 3$, oder

$20 \cdot 3 = 12 \cdot 5$, d. i. $60 = 60$.

2. Beispiel. $12 : x = 7\frac{1}{2} : 2\frac{1}{2}$.

$$\frac{15}{2} \cdot x = \frac{5}{2} \cdot 12.$$

$$x = \frac{\frac{5}{2} \cdot 12}{\frac{15}{2}}.$$

$$= \frac{30}{\frac{15}{2}} = \frac{30 \cdot 2}{15} = \frac{60}{15} = 4.$$

Aus Vorstehendem folgt unmittelbar:

1) dafs man jedes äufsere Glied einer Proportion findet, indem man die inneren Glieder mit einander multipliziert und durch das andere äufsere Glied dividiert; d. h.

ist $a : b = c : d$, so ist $a = \frac{b \cdot c}{d}$ und $d = \frac{b \cdot c}{a}$. (Vergl. Kap. VI unter 30f.)

2) dafs man jedes innere Glied einer Proportion findet, indem man die äufseren Glieder mit einander multipliziert und durch das andere innere Glied dividiert; d. h.

ist $a : b = c : d$, so ist $b = \frac{ad}{c}$ und $c = \frac{ad}{b}$. (Vergl. Kap. VI unter 30f.)

3) dafs man die mittlere Proportionale zwischen zwei Zahlen findet, indem man aus dem Produkt dieser Zahlen die Quadratwurzel zieht; d. h.

ist $a : x = x : b$, so ist $x \cdot x = ab$, oder

$x^2 = ab$. Auf beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen:

$\sqrt{x^2} = \sqrt{ab}$, folglich:

$x = \sqrt{ab}$. (Vergl. Kap. V unter 27.)

Beispiel zu 1.) $3 : 6 = 2{,}5 : x$.

$$x = \frac{6 \cdot 2{,}5}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Beispiel zu 2.) $12 : 4 = x : 5$.

$$x = \frac{12 \cdot 5}{4} = \frac{60}{4} = 15.$$

Beispiel zu 3.) $6 : a = a : 1{,}5$.

$$a^2 = 6 \cdot 1{,}5 = 9.$$

$$a = \sqrt{9} = 3.$$

39. In jeder Proportion kann man alle Glieder mit ein und derselben Zahl multiplizieren und potenzieren, oder durch ein und dieselbe Zahl dividieren und radizieren.

Ist $10 : 5 = 6 : 3$, so ist auch:

$3 \cdot 10 : 3 \cdot 5 = 3 \cdot 6 : 3 \cdot 3$.

$10^2 : 5^2 = 6^2 : 3^2$.

$\frac{10}{10} : \frac{5}{10} = \frac{6}{10} : \frac{3}{10}$.

$\sqrt[3]{10} : \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{3}$.

Ist $a : b = c : d$, so ist auch:

$na : nb = nc : nd$.

$a^n : b^n = c^n : d^n$.

$\frac{a}{n} : \frac{b}{n} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$.

In jeder Proportion kann man die Glieder der Verhältnisse umkehren.

Ist $\underbrace{8:2=68:17}$, so ist auch $\underbrace{2:8=17:68}$, denn es ist $2 \cdot 68 = 8 \cdot 17$ und ebenso $8 \cdot 17 = 2 \cdot 68$.

Ist $a:b = c:d$, so ist auch $b:a = d:c$.

In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der beiden ersten Glieder zum ersten oder zweiten Gliede, wie die Summe oder Differenz der beiden letzten Glieder zum dritten oder vierten Gliede.

Ist $a:b = c:d$, so ist auch:

$$a+b:a = c+d:c.$$
$$a+b:b = c+d:d.$$
$$a-b:a = c-d:c.$$
$$a-b:b = c-d:d.$$

Beispiel:

$$6:2 = 15:5.$$
$$6+2:6 = 15+5:15, \text{ d. i.}$$
$$8:6 = 20:15.$$
$$6 \cdot 20 = 8 \cdot 15.$$
$$120 = 120.$$

Übungsbeispiele:

Aus folgenden Proportionen ist die Unbekannte zu berechnen:

$4:3 = 24:x$; $12:x = 32:48$; $x:2\frac{1}{5} = 3\frac{1}{3}:5\frac{1}{4}$.

$2a^3:5a^2b = 8ab^2:x$; $(a+b):(a-b) = x:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$.

$(6a^2+ab-12b^2):(14a^2+31ab+15b^2) = (3a^2-7ab+4b^2):x$.

Achtes Kapitel.

Potenzen.*)

40. Potenzen werden gleichartig genannt, wenn ihre Grundzahlen und deren Exponenten genau dieselben sind.

Potenzen können nur dann addiert oder subtrahiert werden, wenn sie gleichartig sind; man addiert oder subtrahiert alsdann wie mit gewöhnlichen Buchstabengrößen. (Vergl. Kap. II unter 10). Z. B.

$$4a^2+12a^2 = 16a^2; \quad 20x^2z^5-15x^2z^5+30x^2z^5 = 35x^2z^5.$$

$$\frac{5a^3}{b^4}-\frac{7a^3}{b^4}+\frac{11a^3}{b^4}+a^4 = \frac{9a^3}{b^4}+a^4.$$

Übungsbeispiele:

$-6a^2+10a^2-12a^3+4b^4+14a^3+18b^4$.

$8a^3b-12a^2b^2+4a^3b-14a^2b^2-8ab^3$.

$-3a^2b-(7ab^2+3a^3b)-(2ab^2-8a^2b)-3a^3b$.

$9a^mx^2-13+20ab^3x-4b^mcx^2-(3b^mcx^2+9a^mx^2-6+3ab^3x)$.

$3a^{-7}+10a^{-7}-5a^{-7}+a^2b$.

---

*) Vergl. Kap. IV unter 18, 19 und 20.)

41. Jede Potenz der Zahl Eins ist wieder Eins; d. h.

$$1^m = 1.$$

Beispiele: $1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

$1^6 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$

Jede Potenz, deren Exponent Eins ist, ist gleich der Grundzahl der Potenz; d. h.

$3^1 = 3$ (denn 3 soll einmal als Faktor gesetzt werden).

$x^1 = x$ (denn x soll einmal als Faktor gesetzt werden).

Es ist daher bei dem Rechnen mit Potenzen jede Zahl, welcher kein besonderer Exponent beigeschrieben ist, als mit dem Exponenten **1** behaftet zu betrachten.

42. Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden multipliziert, indem man die einzelnen Exponenten addiert und die so erhaltene Summe der Grundzahl zum Exponenten giebt; d. h.

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

Beispiele: $a^2 \cdot a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6 = a^{2+4}.$

$$6a^2 \cdot 2a^6 \cdot a = 6 \cdot 2 \cdot a^{2+6+1} = 12a^9.$$

$$7x^3 \cdot 5x^8 = 7 \cdot 5 \cdot x^{3+8} = 35x^{11}.$$

$$4b^{-6} \cdot 2b^{10} = 4 \cdot 2 \cdot b^{-6+10} = 8b^4.$$

$$2a^5b^3 \cdot 3a^2b^{-2} = 2 \cdot 3 \cdot a^{5+2}b^{3-2} = 6a^7b.$$

Übungsbeispiele:

$x^7 \cdot y^9 \cdot x^5 \cdot y^3 \cdot y$; $a^x \cdot a^y \cdot a^z$; $a^{x+1} \cdot a^{x+2} \cdot a^{x+3}$; $5a^{2x+3} \cdot 7a^{3-4x} \cdot 9a^{7t-9}$.

$-5a^4b^{-3}c^{-2} \cdot 4a^3b^{-5}d^6c^{-2}$; $(a^2 - 2ab + b^2) \cdot 6a^2b^3$.

$(a^2 - az + z^2)(a^2 + az + z^2)$; $(a^2 + b^2)(a^2 - b^2)$.

$\frac{a^{3x-4y}}{b^{5x+3y}} \cdot \frac{a^{8y-7x}}{b^{4y-2x}}$; $\frac{1}{3a^{-3}b^{-m}c} \cdot \frac{1}{4a^{-p}b}$.

Potenzen mit gleichen Grundzahlen werden dividiert, indem man die einzelnen Exponenten von einander subtrahiert und die so erhaltene Differenz der Grundzahl zum Exponenten giebt; d. h.

$$2^3 : 2^2 = \frac{2^3}{2^2} = 2^{3-2} = 2^1 = 2.$$

$$a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}.$$

Beispiele: $x^3 : x^9 = x^{3-9} = x^{-6}.$

$$b^6 : b^4 = b^{6-4} = b^2.$$

$$6a^{-8} : 2a^{-7} = \tfrac{6}{2} a^{-8-(-7)} = 3a^{-8+7} = 3a^{-1}.$$

$$(a+b)^5 : (a+b)^{-2} = (a+b)^{5+2} = (a+b)^7.$$

Bei der Division von Potenzen mit gleichen Grundzahlen sind nun zwei Fälle möglich:

a) Sind die Exponenten im Dividenden und im Divisor gleich, so erhält man nach vorstehender Regel eine Potenz, deren Exponent Null ist, denn:

$x^5 : x^5 = x^{5-5} = x^0$. Es ist aber auch

$x^5 : x^5 = \frac{x^5}{x^5} = 1$. (Vergl. Kap. V unter 24.)

Folglich mufs $x^0 = 1$ sein, d. h. allgemein:

Jede Potenz, welche Null zum Exponenten hat, ist gleich der Zahl Eins. Es ist demnach auch

$$7^0 = 1; \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1;$$

$$100^0 = 1; \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1 \text{ u. s. w.}$$

b) Ist der Exponent der Potenz des Divisors gröfser als der Exponent der Potenz des Dividenden, so mufs sich nach den Gesetzen der Subtraktion (vergl. Kap. III unter 12) notgedrungen eine negative Zahl ergeben; es entsteht also eine Potenz mit negativem Exponenten, denn es ist:

$b^2 : b^4 = b^{2-4} = b^{-2}$. Schreibt man jedoch

$$b^2 : b^4 = \frac{b^2}{b^4} = \frac{b \,.\, b}{b \,.\, b \,.\, b \,.\, b} = \frac{1}{b^2}$$

(da sich 2 Faktoren **b** im Dividenden gegen 2 Faktoren **b** im Divisor heben)

so folgt auch hier: $b^{-2} = \frac{1}{b^2}$ d. h. allgemein:

Jede Potenz mit negativem Exponenten ist gleich einem Bruch, dessen Zähler Eins und dessen Nenner die Grundzahl der Potenz mit positivem Exponenten ist.

Beispiele: $3^3 : 3^6 = 3^{3-6} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3 \,.\, 3 \,.\, 3} = \frac{1}{27}$.

$$\frac{x}{y^{-n}} = x : y^{-n} = x : \frac{1}{y^n} = x \,.\, \frac{y^n}{1} = xy^n.$$

$$\frac{6}{5^{-2}} = 6 \,.\, 5^2 = 6 \,.\, 25 = 150.$$

$$\frac{a^p}{a^{p+q}} = a^{p-p-q} = a^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

$$3a^{-2}b^6f^{-3} = 3 \,.\, \frac{1}{a^2} \,.\, b^6 \,.\, \frac{1}{f^3} = \frac{3b^6}{a^2f^3}.$$

Übungsbeispiele:

$x^{72}y^{98} : x^{34}y^{62}$; $a^{3m+4} : a^{2m+3}$; $24x^3y^5z^7 : 8x^2y^3z^4$.

$105x^{5m+3n}y^{2m-7n} : 7x^{15n-7m}y^{12m-17n}$; $16(x+y)^{-3} : 2(x+y)^{-9}$.

$(a+x)^2(a+y)^{-3} : (a+x)^{-4}(a+y)^{-7}$; $\left(-\frac{5c^2a^{-m}b^n}{8}\right) : 3cd^5a^pb^{-q}$.

$\frac{3a^3d}{2b^5} : \frac{b^3}{4a^2c^7}$; $\frac{a^{x-y}}{b^{r-s}} : \frac{b^{2r-3s}}{a^{4y-3x}}$; $(6a^3b^2 - 10a^2f + 7a^4bx) : 2a$.

Es sind folgende Ausdrücke auf positive Exponenten zu bringen:

$\frac{5a^{-3}b^2c^{-5}}{7d^{-2}f^{-3}g}$; $\frac{7nx^{-2}yz^{-3}}{8nxy^{-2}z^{-5}}$; $\frac{9^2x^{-2}y^{-5}z^{-8}}{9^3x^{-3}y^{-2}z^5}$.

43. Jede Potenz wird wieder potenziert, indem man einzelnen Exponenten mit einander multipliziert und

das so erhaltene Produkt der Grundzahl zum Exponenten giebt; d. h.

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64, \text{ oder } (x^n)^m = x^{n \cdot m}.$$

Beispiele: $(a^4)^2 = a^4 \cdot a^4 = a^{4+4} = a^8 = a^{4 \cdot 2}$.

$$[(b^m)^n]^p = b^{m \cdot n \cdot p} = b^{n\,m\,p}.$$

$$(x^m)^{-n} = x^{-n \cdot m} = \frac{1}{x^{m\,n}}.$$

Übungsbeispiele:

$(a^3)^5$; $\left((a^2)^3\right)^4)^5$; $(a^{-2})^3$; $\left((x^{-2})^{-3}\right)^{-5}$; $(n^{2a+3b})^{2a-3b}$.

$\left(\frac{x^3y^3z^4}{a^3b^{13}c^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^{-3}b^3z^5}{a^{-1}y^3c^3}\right)^4$; $(m^{10a-18b})^{3a+12b} : (m^{15a+9b})^{2a-4b}$.

Ein Produkt wird potenziert, indem man die Faktoren des Produktes einzeln mit dem Exponenten potenziert und die erhaltenen Potenzen multipliziert; d. h.

$$(5x)^3 = 5^3 \cdot x^3 = 125\,x^3, \text{ oder } (xy)^m = x^m \cdot y^m.$$

Beispiele: $(2abd)^3 = 2^3a^3b^3d^3 = 8a^3b^3d^3$.

$$(5x \cdot 2y \cdot 6z)^2 = 5^2 \cdot 2^2 \cdot 6^2 \cdot x^2y^2z^2 = 3600\,x^2y^2z^2.$$

$$(a^2x^3y)^7 = a^{2 \cdot 7} \cdot x^{3 \cdot 7} \cdot y^{1 \cdot 7} = a^{14}x^{21}y^7.$$

Übungsbeispiele:

$(2a^2b^3c^4)^4$; $((3a^2bc^3)^2)^3$; $(5x^2yz^3)^{-3}$; $[3(a+b)m]^3$; $[7x(x-y)z]^2$.

$(2xy)^5 \cdot (3xy)^2 \cdot 6xy \cdot (6xy)^3$; $\frac{(5ab)^2 \cdot (3ab)^3}{(10ab)^4 \cdot (ab)^3}$.

Ein Quotient (Bruch) wird potenziert, indem man den Dividenden (Zähler) und den Divisor (Nenner) einzeln mit dem Exponenten potenziert; d. h.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}, \text{ oder } \left(\frac{a}{x}\right)^n = \frac{a^n}{x^n}.$$

Beispiele: $\left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}$.

$$\left(\frac{a^2b^3x}{cd^4}\right)^5 = \frac{a^{10}b^{15}x^5}{c^5d^{20}}; \quad \left(\frac{3ab}{2cd}\right)^3 = \frac{3^3a^3b^3}{2^3c^3d^3} = \frac{27a^3b^3}{8c^3d^3}.$$

Übungsbeispiele:

$\left(\frac{2}{3}\right)^4$; $\left(\frac{3abc}{5xyz}\right)^2$; $\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2$; $\left(\frac{2a}{3b}\right)^4 \cdot \left(\frac{9b}{8a}\right)^2$.

$\left(\frac{3x}{4y}\right)^4 \cdot \left(\frac{4y}{5z}\right)^3 \cdot \left(\frac{5z}{9x}\right)^2$; $\left(\left(\frac{3a^2b^3}{2fg}\right)^3\right)^4$; $\left(\left(\frac{a^{-2}b^3c^{-4}}{d^{-2}}\right)^2\right)^3$.

44. Je nachdem der Exponent einer Potenz eine gerade oder ungerade Zahl ist, wird die Potenz eine gerade oder ungerade Potenz genannt. Folgende wichtigen Sätze sind besonders zu merken:

Jede Potenz einer positiven Zahl ist stets wieder eine positive Zahl; d. h.

$$(+x)^m = +x^m.$$

Beispiele: $(+4)^3 = (+4) \cdot (+4) \cdot (+4) = +64$.

$(+2)^4 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +16$.

Jede gerade Potenz einer negativen Zahl ist stets eine positive Zahl. (Vergl. Kap. IV unter 15.)

Beispiele:

$(-a)^4 = (-a)(-a)(-a)(-a) = (+a^2)(+a^2) = +a^{2+2} = +a^4.$
$(-3)^2 = (-3)(-3) = +9.$
$(-2)^6 = +2^6 = +64.$

Jede ungerade Potenz einer negativen Zahl ist stets eine negative Zahl. (Vergl. Kap. IV unter 15.)

Beispiele:

$(-a)^5 = (-a)(-a)(-a)(-a)(-a) = (+a^2)(+a^2)(-a) = (+a^4)(-a) = -a^5.$
$(-4)^5 = (-4)(-4)(-4)(-4)(-4) = (-4)^4(-4) = +256 \cdot (-4) = -1024.$

Die Richtigkeit der in Vorstehendem gegebenen Regeln läfst sich leicht und ohne weiteres unter Berücksichtigung des in Kapitel IV unter 18 und 19) Gesagten, und unter Anwendung der einfachen Multiplikationsgesetze nachweisen, wie dies zum Teil schon in den gegebenen Beispielen angedeutet ist.

Neuntes Kapitel.

Wurzeln.

A. Allgemeines.

45. In Kapitel V unter 27) ist bereits auf den algebraischen Begriff „Wurzel“ und den innigen Zusammenhang der Operationen des Radizierens und Potenzierens hingewiesen worden. Es ist daher leicht ersichtlich, dafs die bei dem Rechnen mit Wurzeln geltenden Regeln auf die entsprechenden, bei den Potenzen gebräuchlichen, zurückgeführt werden können und dürfte es deshalb für den Lernenden sehr vorteilhaft sein, jedes Gesetz der Wurzellehre mit dem entsprechenden der Potenzlehre zu vergleichen. Es wird dies mit um so gröfserem Verständnis geschehen, wenn man sich der in der Praxis vielfach angewandten zweiten Schreibweise für einen Wurzelausdruck bedient.

Es ist üblich, an Stelle der Wurzel die „Bruchpotenz“ zu setzen und setzt man allgemein:

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

d. h.: Jede Wurzel aus einer Zahl ist gleich einer Potenz, deren Exponent ein Bruch ist, dessen Zähler der Potenzexponent und dessen Nenner der Wurzelexponent bildet. So schreibt man z. B.

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}};\ \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}};\ \sqrt[4]{y} = y^{\frac{1}{4}} \text{ u. s. w.}$$

Befindet sich unter dem Wurzelzeichen eine Potenz, so ndet das Gesetz seinen Ausdruck in der Gleichung:

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}.$$

Die Richtigkeit wird ohne weiteres durch folgendes Beispiel nachewiesen. Es ist

$$\sqrt{a^2} = a,$$

enn a mit 2 potenziert giebt wieder a^2. (Vergl. Kap. V unter 27.) Vendet man die Schreibweise der Bruchpotenz an, so folgt:

$$\sqrt[2]{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a.$$

Beispiele: $\sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$; $\sqrt[4]{a^2} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

$\sqrt{4^9} = 4^{\frac{9}{3}} = 4^3 = 64$; $\sqrt[3]{9^{\frac{3}{2}}} = 9^{\frac{\frac{3}{2}}{3}} = 9^{\frac{3}{6}} = 9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

$\sqrt{a^{-8}} = a^{\frac{-8}{4}} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$. (Vergl. Kap. VIII unter 42b.)

46. Für das Rechnen mit Bruchpotenzen sind genau ieselben Regeln zu befolgen, welche im vorigen Kapitel für otenzen, deren Exponenten ganze Zahlen sind, gegeben wurden.

Beispiele: $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$.

$a^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{6}} = a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$.

$\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{5}{2}} = y^{\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}} = y^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{y^5}$.

$\left(a \cdot x\right)^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{3}{4}} \cdot x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{a^3 x^3}$.

$\left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c^{\frac{1}{2}}}{d^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{d}} = \sqrt{\frac{c}{d}}$.

$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$.

47. Wurzeln sind gleichartig, wenn ihre Grundzahlen ıd Exponenten genau dieselben sind.

Wurzeln können nur dann addiert oder subtrahiert werden, enn sie gleichartig sind; man addiert oder subtrahiert alsınn wie mit gewöhnlichen Buchstabengröfsen. (Vergl. Kap. II ıter 10). Z. B.

$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$; $6\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a} - 8\sqrt[3]{a} = 3\sqrt[3]{a}$.

$\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[5]{y} - 2\sqrt[4]{x} - 9\sqrt[5]{y} = 5\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[4]{x} + 3\sqrt[5]{y} - 9\sqrt[5]{y}$

$= 3\sqrt[4]{x} - 6\sqrt[5]{y}$.

Übungsbeispiele:

$2\sqrt[6]{ab} + 9\sqrt[6]{ab} - 12\sqrt[6]{ab} - \sqrt[6]{ab} + 8\sqrt[6]{ab} + \sqrt[6]{ab}$.

$\sqrt{ac} - (2\sqrt{ac} - 7\sqrt{ac} + 9\sqrt{ac} + \sqrt{ac})$.

$7\sqrt[3]{a} - (-6\sqrt[3]{a} + 4\sqrt[4]{b} - 9\sqrt[3]{a} - 5\sqrt[4]{c})$.

$3\sqrt[4]{x^2y} - 9\sqrt[4]{x^2y} + 6\sqrt[5]{x^2y} + 7\sqrt[5]{x^2y}$.

$12\sqrt{a} - a\sqrt{b} - (\sqrt[3]{a} - 8\sqrt{b} - 7\sqrt{a})$.

$7\sqrt[3]{a} - 9\sqrt[3]{ab} + 6\sqrt[4]{ab} - (-9\sqrt[4]{ab} + 5\sqrt[3]{ab} + 7\sqrt[3]{a})$.

48. Jede Wurzel aus Eins ist wieder Eins, d. h.

$$\sqrt[n]{1} = 1, \text{ oder}$$

$\sqrt[3]{1} = 1$; denn $1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$ u. s. w.

49. Die Wurzel aus einem Produkt wird ausgezogen, indem man sie aus jedem Faktor einzeln auszieht und dann die erhaltenen Wurzeln multipliziert; d. h.

$$\sqrt{36a^2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{a^2} = 6a \text{ und } \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

Beispiele:

$$\sqrt{16 \cdot 25} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{25} = \sqrt{4^2} \cdot \sqrt{5^2} = 4 \cdot 5 = 20.$$

$$\sqrt[3]{6^6a^3} = \sqrt[3]{6^6} \cdot \sqrt[3]{a^3} = 6^{\frac{6}{3}} \cdot a^{\frac{3}{3}} = 6^2 \cdot a = 36a.$$

$$\sqrt[3]{27a^9b^6} = \sqrt[3]{3^3a^9b^6} = 3^{\frac{3}{3}}a^{\frac{9}{3}}b^{\frac{6}{3}} = 3a^3b^2.$$

$$\sqrt[4]{16(a+b)^4} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{(a+b)^4} = 2(a+b).$$

$$\sqrt{4a^2b^2} + \sqrt[3]{8a^3b^3} - \sqrt[4]{16a^4b^4} = 2ab.$$

Übungsbeispiele:

$\sqrt{81 \cdot 121}$; $\sqrt{49 \cdot 256}$; $\sqrt[3]{27 \cdot 125}$; $\sqrt[3]{8x^3y^3}$; $\sqrt[3]{a^6}$; $\sqrt[7]{a^{28}}$; $\sqrt[5]{a^{-10}}$.

$\sqrt[-4]{a^{20}}$; $\sqrt[-9]{a^{-36}}$; $\sqrt[\frac{2}{3}]{a^4}$; $\sqrt[5]{a^{-10} \cdot b^{45}c}$; $\sqrt[x]{a^{2x}b^{nx}}$.

Die Wurzel aus einem Quotienten (Bruch) wird ausgezogen, indem man die Wurzel aus dem Dividenden (Zähler) und dem Divisor (Nenner) einzeln auszieht; d. h.

$$\sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}; \quad \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}.$$

Beispiele:

$$\sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{6^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{6}{7}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{3^{12}}{a^4b^8}} = \frac{\sqrt[4]{3^{12}}}{\sqrt[4]{a^4b^8}} = \frac{3^{\frac{12}{4}}}{a^{\frac{4}{4}}b^{\frac{8}{4}}} = \frac{3^3}{ab^2} = 27\frac{1}{ab^2}.$$

$$\sqrt[3]{0{,}027} = \sqrt[3]{\frac{27}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{3^3}{10^3}} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Bei dem praktischen Rechnen mit Wurzeln ist folgendes Verfahren oft von grofsem Vorteil: Ist der Nenner des Bruches, aus dem z. B. die Quadrat-Wurzel gezogen werden soll, keine Quadrat-Zahl, so kann man denselben dazu machen, indem man Zähler und Nenner des Bruches mit dem Nenner multipliziert; auf diese Weise erspart man das Ausziehen einer Quadratwurzel.

Beispiele: $\sqrt{\frac{7}{11}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 11}{11 \cdot 11}} = \frac{\sqrt{77}}{\sqrt{11^2}} = \frac{\sqrt{77}}{11} = \frac{1}{11}\sqrt{77}.$

$$\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{\frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-b)}} = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{(a-b)^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}.$$

(Bei dem Ausziehen der Kubikwurzel hätte man Zähler und Nenner mit der zweiten Potenz des Nenners multiplizieren müssen u. s. w.)

Übungsbeispiele:

$$\sqrt{\frac{16}{25}};\ \sqrt{0{,}25};\ \sqrt[3]{3^3/_8};\ \sqrt[3]{0{,}125};\ \sqrt[6]{\frac{a^{-12}b^{18}c^{24}}{d^{12}e^{-24}}};\ \sqrt{\frac{ab^{-4}c^8}{d^4e^{10}}};\ \sqrt[9]{\frac{a^{27}b^{18}}{cd^{36}}}.$$

50. Die Wurzel aus einer Potenz wird ausgezogen, indem man den Wurzelexponenten durch den Potenzexponenten dividiert und die Grundzahl der Potenz durch den erhaltenen Quotienten radiziert; d. h.

$$\sqrt[3]{a^9} = \sqrt[\frac{3}{9}]{a} = \sqrt[\frac{1}{3}]{a} = a^3; \quad \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[\frac{n}{m}]{x}.$$

Beispiele: $\sqrt[4]{a^2}$

$$\left\{\begin{array}{l} = \sqrt[\frac{4}{2}]{a} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}, \text{ oder} \\ = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}. \end{array}\right.$$

$\sqrt[9]{a^3}$

$$\left\{\begin{array}{l} = \sqrt[\frac{3}{3}]{a} = \sqrt[3]{a}, \text{ oder} \\ = a^{\frac{3}{9}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}. \end{array}\right.$$

Die Wurzel aus einer anderen Wurzel wird ausgezogen, indem man die beiden Wurzelexponenten multipliziert und den Radikanden durch das erhaltene Produkt radiziert; d. h.

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[2.3]{64} = \sqrt[6]{64} = 2; \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m.n]{x}.$$

Beispiele: $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$

$$\left\{\begin{array}{l} = \sqrt[3.2]{a} = \sqrt[6]{a}, \text{ oder} \\ = \sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{a}. \end{array}\right.$$

$\sqrt{\sqrt[3]{a^6}}$

$$\left\{\begin{array}{l} = \sqrt[2.3]{a^6} = \sqrt[6]{a^6} = a^{\frac{6}{6}} = a^1 = a. \\ = \sqrt{a^{\frac{6}{3}}} = \left(a^2\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{2}} = a^1 = a. \end{array}\right.$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{16}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4}} = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}.$$

Umgekehrt gilt natürlich auch:

$$\sqrt[6]{a^{12}} \begin{cases} = \sqrt[3.2]{a^{12}} = \sqrt[3]{\sqrt{a^{12}}} = \sqrt[3]{a^6} = a^2. \\ = \sqrt[2.3]{a^{12}} = \sqrt{\sqrt[3]{a^{12}}} = \sqrt{a^4} = a^2. \end{cases}$$

$$\sqrt[12]{a} = \sqrt[3.2.2]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a}}}$$

d. h. Wurzeln mit hohen Exponenten können in durcheinander zu radizierende Wurzeln mit niedrigen Exponenten zerlegt werden.

51. Je nachdem der Exponent einer Wurzel eine gerade oder ungerade Zahl ist, wird die Wurzel eine gerade oder ungerade Wurzel genannt. Man merke folgende wichtigen Sätze:

Jede gerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist sowohl positiv als negativ.

$\sqrt{4} = \pm 2$, denn es ist $(+2)^2 = 4$ und ebenso $(-2)^2 = 4$.

$\sqrt[4]{81} = \pm 3$ „ „ „ $(+3)^4 = 81$ „ „ $(-3)^4 = 81$.

$\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$ „ „ „ $\left(+\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ „ „ $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

$\sqrt{x^4} = \pm x^2$ „ „ „ $(+x^2)^2 = +x^4$ „ $(-x^2)^2 = x^4$.

Jede ungerade Wurzel aus einer positiven Zahl ist nur positiv.

$\sqrt[3]{27} = +3$, denn nur $(+3)^3$ ist $= +27$.

$\sqrt[5]{32} = +2$ „ „ $(+2)^5$ „ $= +32$.

$\sqrt[3]{x^{12}} = +x^4$ „ „ $(+x^4)^3$ „ $= +x^{12}$.

Jede ungerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist nur negativ.

$\sqrt[3]{-27} = -3$, denn nur $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3)$ ist $= -27$.

$\sqrt[5]{-243} = -3$, denn nur $(-3)^5 = -243$.

$\sqrt[3]{-a^6} = -\sqrt[6]{a} = -a^2$, denn $(-a^2)^3 = (-a^2)(-a^2)(-a^2) = -a^6$.

B. Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln.*)

52. Bei dem Wurzelausziehen kann die gesuchte Wurzel nicht immer genau gefunden werden; in den meisten Fällen läfst sich die Wurzel nur näherungsweise bestimmen.

*) Vergleiche die Tabellen im Anhange des Buches.

Eine Wurzel ist stets genau, wenn die Grundzahl (vergl. Kap. V unter 27) eine Potenz der Wurzel ist, d. h. aus der zweiten Potenz einer Zahl läfst sich ohne weiteres die Quadratwurzel, aus der dritten Potenz die Kubikwurzel, aus der vierten Potenz die $2 . 2 = 4$. Wurzel genau bestimmen; u. s. w.

53. Multipliziert man einstellige Zahlen mit sich selbst, d. h. bildet man deren Quadrate, so bestehen die Resultate aus ein- oder zweiziffrigen Zahlen; mithin mufs umgekehrt die Quadratwurzel aus einer ein- oder zweiziffrigen Zahl eine einziffrige Wurzel ergeben. Bildet man die Quadrate zweistelliger Zahlen, so sind die Resultate drei- oder vierziffrig und mufs umgekehrt die Quadratwurzel aus einer drei- oder vierziffrigen Zahl eine zweistellige Zahl sein. Hieraus folgt, dafs eine mehrstellige Zahl, aus welcher die Quadratwurzel gezogen werden soll, von rechts nach links in Klassen von je 2 Stellen geteilt werden mufs, wobei die links stehende letzte und höchste Klasse auch nur eine Stelle erhalten kann. So hat z. B. die Zahl 8|34|69|03, wenn sie wie angegeben, zum Zwecke des Ausziehens der Quadratwurzel in Klassen geteilt wird, 4 Klassen; die gesuchte Wurzel mufs also eine 4ziffrige Zahl werden.

54. Erhebt man einstellige Zahlen zur dritten Potenz, so bestehen die Resultate aus 1-, 2- und 3ziffrigen Zahlen; umgekehrt mufs daher die Kubikwurzel aus solchen Zahlen einstellig werden. Bildet man die dritten Potenzen zweistelliger Zahlen, so werden die Resultate 4-, 5- und 6stellig; umgekehrt mufs daher die Kubikwurzel aus derartigen Zahlen zweistellig werden. Für das Ausziehen der Kubikwurzel ist es daher notwendig, die zu radizierende Zahl von rechts nach links in Klassen von je 3 Stellen zu teilen, wovon die links stehende höchste Klasse auch nur 2 oder nur 1 Stelle erhalten kann. So hat z. B. die Zahl 8|346|903, wenn sie behufs Ausziehung der dritten Wurzel geteilt werden soll, 3 Klassen; die gesuchte Wurzel mufs also eine 3stellige Zahl werden.

Einige Beispiele sollen die beim Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel einzuschlagenden Wege klarlegen.

Ausziehen der Quadratwurzel.

55. Die Grundlage für das Ausziehen der Quadratwurzel bildet die in Kap. IV unter 20, 1) gegebene Formel:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Um aus der rechten Seite dieser Gleichung die Quadratwurzel auszuziehen, ziehe man sie zunächst aus dem ersten Gliede a^2; dieselbe ist $= a$, und bildet a das erste Glied der

gesuchten Wurzel. Erhebt man a in das Quadrat $= a^2$ und zieht man a^2 von der rechten Seite der Gleichung ab, so bleibt als Rest $2ab + b^2$ übrig. Nun bilde man das doppelte Produkt des

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b \\ a^2 = & -a^2 \\ \hline 2 \,.\, a = & 2a \;\big|\; +2ab + b^2 \\ 2 \,.\, a \,.\, b = & \quad -2ab \\ \hline & \quad +b^2 \\ b^2 = & \quad -b^2 \\ \hline \end{array}$$

ersten Gliedes a der Wurzel $= 2a$ und dividiere mit 2a in das erste Glied 2ab des Restes, so erhält man als zweites Glied der Wurzel den Wert b. Mit b multipliziere man den Wert $2a = 2ab$, bilde ferner das Quadrat des zweiten Gliedes der Wurzel $= b^2$ und subtrahiere nun 2ab und b^2 von dem obigen Rest; der jetzt entstehende Rest wird dann gleich Null und die gesuchte Wurzel ist genau $= a + b$.

56. Bei bestimmten Zahlen ist das Verfahren genau dasselbe:

a) Soll z. B. aus der Zahl 9025 die Quadratwurzel ausgezogen werden, so teile man die Zahl von rechts nach links in Klassen von je 2 Stellen, suche aus der höchsten Klasse 90 die gröfste Wurzel $= 9$ und setze $9 = a$; bilde $a^2 = 9^2 = 81$ und ziehe 81 von 90 ab. Zu dem Rest 9 nehme man die erste Stelle 2 der zweiten Klasse herunter und dividiere mit $2a = 2 \,.\, 9 = 18$ in die Zahl 92. Diese Division ergiebt den

$$\begin{array}{rrrl} & & & \sqrt{90\,25} = \overset{a\,b}{95} \\ a^2 = & 9^2 = & 81 & \\ \hline 2a = & 2 \,.\, 9 = & 18 \;\big|\; 92 & \\ 2ab = 2 \,.\, 9 \,.\, 5 = & & 90 & \\ \hline & & 25 & \\ b^2 = & 5^2 = & 25 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

Quotienten 5, welchen man $= b$ setzt. Nun bilde man das Produkt $2ab = 2 \,.\, 9 \,.\, 5 = 90$, ziehe 90 von 92 ab und nehme zu dem sich ergebenden Rest 2 die zweite Stelle 5 der zweiten Klasse herunter, wodurch die Zahl 25 entsteht. Bildet man jetzt $b^2 = 5^2 = 25$ und subtrahiert man 5^2 von 25, so ergiebt sich als Rest Null und ist die gesuchte Wurzel die Zahl 95.

b) Geht die Division nicht wie im Beispiel unter a) auf, sondern ergiebt sich nach der Subtraktion von b^2 noch ein Rest, so nimmt man bei einer mehrklassigen Zahl die erste Stelle der dritten Klasse zum Rest herunter, betrachtet die beiden ersten Stellen der gefundenen Wurzel zu-

sammen als a und dividiert mit dem neuen Produkt 2a in den vorher gebildeten Rest; ein Verfahren, welches sich bei jeder neuen Klasse wiederholt. (Siehe folgendes Beispiel.)

$$\sqrt{7|91|29|69} = 2813$$

$a^2 =$	$2^2 =$	4
$2a =$	$2 . 2 =$	4|39
$2ab =$	$2 . 2 . 8 =$	32
		71
$b^2 =$	$8^2 =$	64
$2a =$	$2 . 28 =$	56|72
$2ab =$	$2 . 28 . 1 =$	56
		169
$b^2 =$	$1^2 =$	1
$2a =$	$2 . 281 =$	562|1686
$2ab =$	$2 . 281 . 3 =$	1686
		9
$b^2 =$	$3^2 =$	9
		0

c) Erhält man bei der Division eines Restes durch das Produkt 2a den Quotienten Null, so verfährt man folgendermafsen:

$$\sqrt{1|10|25} = 105$$

$a^2 =$	$1^2 =$	1
$2a =$	$2 . 1 =$	2| 1 = Null mal! Folglich mufs die ganze zweite Klasse und die erste Stelle der dritten Klasse heruntergenommen werden, wodurch im Rest die Zahl 102 entsteht; a wird jetzt = 10, folglich $2a = 2 . 10 = 20$, und mufs nun mit 20 in die Zahl 102 dividiert werden.
$2a =$	$2 . 10 =$	20|102
$2ab =$	$2 . 10 . 5 =$	100
		25
$b^2 =$	$5^2 =$	25
		0

d) Ist aus einem Dezimalbruch die Wurzel zu ziehen, so kommt stets **auf das Dezimalkomma** ein Klassenstrich zu stehen und werden die Ganzen des Dezimalbruchs von rechts nach links, und die Dezimalstellen von links nach rechts in Klassen von je 2 Stellen geteilt. In der gefundenen Wurzel wird das Dezimalkomma stets hinter

die Zahl gesetzt, welche sich als Quotient bei d Division der letzten Klasse der Ganzen des Dezimalbruc durch das Produkt 2a ergab.

1. Beispiel.

$$\sqrt{20|02,|56|25} = 44,75$$

$a^2 =$	$4^2 =$	16	
$2a =$	$2 . 4 =$	8	40
$2ab =$	$2 . 4 . 4 =$		32
			82
$b^2 =$	$4^2 =$		16
$2a =$	$2 . 44 =$	88	665
$2ab =$	$2 . 44 . 7 =$		616
			496
$b^2 =$	$7^2 =$		49
$2a =$	$2 . 447 =$	894	4472
$2ab =$	$2 . 447 . 5 =$		4470
			25
$b^2 =$	$5^2 =$		25
			0

2. Beispiel.

$$\sqrt{0,|18|49} = 0,\overset{a\,b}{43}$$

$a^2 =$	$4^2 =$	16	
$2a =$	$2 . 4 =$	8	24
$2ab =$	$2 . 4 . 3 =$		24
			9
$b^2 =$	$3^2 =$		9
			0

3. Beispiel.

$$\sqrt{0,|06|76} = 0,\overset{a\,b}{26}$$

$a^2 =$	$2^2 =$	4	
$2a =$	$2 . 2 =$	4	27
$2ab =$	$2 . 2 . 6 =$		24
			36
$b^2 =$	$6^2 =$		36
			0

4. Beispiel.

$$\sqrt{0,|00|00|01|69} = 0,00\overset{a\,b}{13}$$

$a^2 =$	$1^2 =$	1	
$2a =$	$2 . 1 =$	2	6
$2ab =$	$2 . 1 . 3 =$		6
			9
$b^2 =$	$3^2 =$		9
			0

e) Ist der Wert der Wurzel nur annähernd zu bestimmen, geht die Wurzelausziehung, nachdem die letzte Klasse heruntergenommen worden ist, nicht auf und wünscht man noch einige Stellen der Wurzel zu kennen, so werden die fehlenden, noch zur Wurzelausziehung erforderlichen Klassen durch Nullenpaare ersetzt. Soll z. B. aus 150 die Quadratwurzel gezogen werden, so kann man statt 150 die Zahl 150,0000 ..... setzen. (Siehe nebenstehendes Beispiel.)

$$\begin{array}{rl}
 & \overbrace{\overbrace{\overbrace{a\ b}^{a}\ b}^{a\ b}}\ .\ . \\
\sqrt{1|50,|00|00|\ldots} = & 12,247\ldots \\
a^2 = & 1 \\
2a = & 2|5 \\
2ab = & \ \ 4 \\
 & \ \ 10 \\
b^2 = & \ \ \ 4 \\
2a = & 24|\ 60 \\
2ab = & \ \ \ 48 \\
 & \ \ \ 120 \\
b^2 = & \ \ \ \ 4 \\
2a = & 244|1160 \\
 & \text{u. s. w.}
\end{array}$$

Übungsbeispiele:

$\sqrt{1225}$; $\sqrt{676}$; $\sqrt{163216}$; $\sqrt{15129}$; $\sqrt{25836889}$; $\sqrt{5499025}$.

$\sqrt{5878888828164}$; $\sqrt{4401604}$; $\sqrt{9054081}$; $\sqrt{1236544}$; $\sqrt{123454321}$.

$\sqrt{824591124900}$; $\sqrt{227,7881}$; $\sqrt{0,013689}$; $\sqrt{0,00056644}$.

$\sqrt{25,0007000049}$; $\sqrt{\frac{4}{25}}$; $\sqrt[4]{208827064576}$.

Ausziehen der Kubikwurzel.

57. Die Grundlage für das Ausziehen der Kubikwurzel bildet die in Kap. IV unter 20, 3) gegebene Formel:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Soll aus der rechten Seite der Gleichung die 3. Wurzel gezogen werden, so ziehe man sie zunächst aus dem ersten Gliede a^3; dieselbe ist $= a$, und bildet a das erste Glied der gesuchten Wurzel. Erhebt man a in die 3. Potenz $= a^3$ und zieht man a^3 von der rechten Seite der Gleichung ab, so bleibt als Rest $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ übrig. Nun bilde man das

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt[3]{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3} = a + b \\
a^3 = & -a^3 \\
3a^2 = & 3a^2 \,|\, 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
3a^2b = & \quad -3a^2b \\
 & \qquad\qquad + 3ab^2 + b^3 \\
3ab^2 = & \qquad\qquad -3ab^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad + b^3 \\
b^3 = & \qquad\qquad\qquad -b^3 \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

3-fache Quadrat der gefundenen Wurzel $a = 3a^2$ und dividiere mit $3a^2$ in das erste Glied $3a^2b$ des Restes, so erhält man als zweites Glied der Wurzel den Wert b. Mit b multipliziere man den Wert $3a^2 = 3a^2b$, bilde ferner das Produkt aus dem 3-fachen ersten Gliede a der Wurzel und dem Quadrat des zweiten Gliedes $b = 3ab^2$, und endlich noch die 3. Potenz des zweiten Gliedes b der Wurzel $= b^3$. Subtrahiert man den Wert $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ von dem obigen Rest, so bleibt Null übrig und die gesuchte Wurzel ist genau $= a + b$.

58. Bei dem Ausziehen der Kubikwurzel aus bestimmten Zahlen ist genau derselbe Weg einzuschlagen, wie unter 57) angegeben; es gelten auch hier, aufser der Einteilung in Klassen von je **3** Stellen, die unter 56 b, c, d und e) gegebenen Regeln.

a) Um z. B. aus der Zahl 185 193 die Kubikwurzel auszuziehen, teile man die Zahl von rechts nach links in Klassen von je 3 Stellen, suche aus der links stehenden höchsten Klasse 185 die gröfste Kubikwurzel $= 5$ und setze $5 = a$; bilde $a^3 = 5^3 = 125$, und ziehe 125 von 185 ab. Zu dem Rest 60 nehme man die erste Stelle 1 der zweiten Klasse herunter und dividiere mit $3a^2 = 3 \cdot 5^2 = 75$ in die erhaltene Zahl 601. Die Division ergiebt den Quotienten 7, welchen man $= b$ setzt. Nun bilde man das Produkt $3a^2b = 3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 525$, ziehe diese Zahl von 601 ab und nehme zu dem entstehenden Rest 76 die zweite Stelle 9 der zweiten Klasse herunter. Von der so entstandenen Zahl 769 subtrahiere man das Produkt $3ab^2 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 = 735$, wobei sich der Rest 34 ergiebt. Fügt man zu diesem die 3. Stelle 3 der zweiten Klasse hinzu und subtrahiert man von der so entstandenen Zahl 343 den Wert $b^3 = 7^3 = 343$, so wird jetzt der Rest gleich Null. Die gesuchte Wurzel ist also die Zahl 57.

$\sqrt[3]{185|193} = {}^{ab}57$

$a^3 =$	$5^3 =$	125
$3a^2 =$	$3 \cdot 5^2 =$	75 | 601
$3a^2b =$	$3 \cdot 5^2 \cdot 7 =$	525
		769
$3ab^2 =$	$3 \cdot 5 \cdot 7^2 =$	735
		343
$b^3 =$	$7^3 =$	343
		0

Wären noch mehr Klassen vorhanden, so würde sich das Verfahren genau wiederholen, nur müfste man jetzt die Zahl $57 = a$ setzen und nun mit $3a^2 = 3 \cdot 57^2$ in den event. Rest dividieren, so ein neues Glied b der Wurzel bestimmen, u. s. w.

b) Soll z. B. aus 0,08 die 3. Wurzel gezogen werden, so setze man $0{,}08 = 0{,}08000000 \ldots\ldots$ (vergl. Text zu 56 c), woraus folgt:

$$\sqrt[3]{0,|080|000|000} = 0,\overbrace{\overbrace{\overbrace{4}^{a}\,\overbrace{3}^{b}}^{a\,b\,.}}^{a\,b\,.\,.}08\ldots\ldots$$

$$\begin{array}{rrl}
a^3 = & 4^3 = & \ 64 \\
3a^2 = & 3\,.\,4^2 = & 48|\ 160 \\
3a^2b = & 3\,.\,4^2\,.\,3 = & \ 144 \\
 & & \ 160 \\
3ab^2 = & 3\,.\,4\,.\,3^2 = & \ 108 \\
 & & \ 520 \\
b^3 = & 3^3 = & \ 27 \\
3a^2 = & 3\,.\,43^2 = & 5547|4930
\end{array}$$

= Null mal! Folglich muſs die ganze dritte Klasse und die erste Stelle der vierten Klasse herunter; a ist jetzt = 430 und wird nun $3a^2 = 3\,.\,430^2$, d. h.

$$\begin{array}{rrl}
3a^2 = & 3\,.\,430^2 = & 554700|4930000 \\
3a^2b = & 3\,.\,430^2\,.\,8 = & \ 4437600 \\
 & & \ 4924000 \\
3ab^2 = & 3\,.\,430\,.\,8^2 = & \ 82560 \\
 & & \ 4841440 \\
b^3 = & 8^3 = & \ 512 \\
3a^2 = & 3\,.\,4308^2 = & 55676592|\ 48409280
\end{array}$$

u. s. w.

Übungsbeispiele:

$\sqrt[3]{262144}$; $\sqrt[3]{405224}$; $\sqrt[3]{12167}$; $\sqrt[3]{1331}$; $\sqrt[3]{10648}$; $\sqrt[3]{91125}$.

$\sqrt[3]{1191016}$; $\sqrt[3]{700227072}$; $\sqrt[3]{28233316125}$; $\sqrt[3]{42,875}$; $\sqrt[3]{12,326391}$.

$\sqrt[3]{0,001771561}$; $\sqrt[3]{0,00007880599}$; $\sqrt[3]{730,215675125}$.

59. Soll die Quadrat- oder Kubikwurzel aus einem echten oder unechten Bruch gezogen werden, so verfahre man entweder nach dem in Kap. IX unter 49) angegebenen Verfahren, oder man verwandle den gewöhnlichen Bruch in einen Dezimalbruch.

1. Beispiel. $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7\,.\,8}{8\,.\,8}} = \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{8^2}} = \frac{\sqrt{56}}{8} = \frac{1}{8}\sqrt{56}$ oder:

$$\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{0,875}.$$

2. Beispiel. $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} = \sqrt[3]{\frac{7 \cdot 8^2}{8 \cdot 8^2}} = \frac{\sqrt[3]{7 \cdot 64}}{\sqrt[3]{8^3}} = \frac{\sqrt[3]{448}}{8} = \frac{1}{8}\sqrt[3]{448}$

oder: $\sqrt[3]{\frac{7}{8}} = \sqrt[3]{0{,}875}$.

Übung-beispiele:

$\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{\frac{9}{81}}$; $\sqrt{\frac{7}{4}}$; $\sqrt{11\frac{1}{16}}$; $\sqrt{\frac{5}{3}}$; $\sqrt{\frac{7}{8}}$; $\sqrt{\frac{5}{12}}$; $\sqrt{\frac{1}{17}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{5}}$; $\sqrt[3]{\frac{343}{512}}$.

$\sqrt[3]{465\frac{31}{64}}$; $\sqrt[3]{52034\frac{10}{27}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{6}}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{14}}$.

Zweiter Teil.

Mechanik.

Einleitung.

Die Mechanik behandelt die Lehre von der Bewegung und dem Gleichgewichte der Körper.

Soll ein Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung übergehen, oder soll ein in Bewegung befindlicher Körper entweder seine Richtung oder seine Geschwindigkeit ändern, so ist hierzu eine äufsere Ursache erforderlich, welche man „Kraft“ nennt. Es wird sich daher auch die Mechanik insbesondere mit den Kräften und der verschiedenen Wirksamkeit derselben, sowie mit den Hindernissen, welche dieser Wirksamkeit entgegentreten, beschäftigen.

Ebenso bespricht die Mechanik auch die Bedingungen, unter welchen Körper den auf sie einwirkenden, bewegenden Kräften zu widerstehen vermögen; sie behandelt also auch die Widerstandsfähigkeit oder Festigkeit der in der Praxis verwendeten Materialien.

Schliefslich bespricht die Mechanik auch noch besondere mechanische Vorrichtungen — die sogenannten Maschinen — unter deren Anwendung man eine als zweckmäfsig erkannte Bewegung einleiten oder einer nicht gewünschten Bewegung vorbeugen kann.

Die Materie, aus welcher auch alle Körper bestehen mögen, ist nicht befähigt durch sich allein eine Bewegung anzunehmen, oder eine einmal erhaltene Bewegung umzuändern, wenn nicht äufsere Ursachen — Kräfte — auf sie einwirken.

Man nennt diese Eigenschaft der Materie Trägheit oder Beharrungsvermögen.

Jeder materielle Körper bleibt also so lange in Ruhe, als keine Kraft auf ihn einwirkt und jeder einmal in Bewegung gesetzte materielle Körper behält eine einmal empfangene Bewegung sowohl der Richtung als auch der Stärke nach für immer bei, wenn ihm keine Hindernisse — Kräfte — entgegengesetzt werden.

Man sagt daher:

Kraft ist die Ursache jeder Bewegung oder Bewegungsänderung materieller Körper.

Gleichgewicht zwischen zwei oder mehreren Kräften wird stattfinden, wenn die Wirkungen dieser, eine entgegengesetzte Bewegung erstrebenden Kräfte sich aufheben, d. h. gleich sind.

Es ist hierbei nicht notwendig, dafs die thätigen Kräfte selbst einander genau gleich sein müssen; vielmehr kommt es hierbei auf die besonderen Verhältnisse an, unter denen sie ihre Wirksamkeit ausüben.

Im Gleichgewichtszustand kann sich sowohl ein ruhender als ein bewegter Körper befinden; letzterer dann, wenn er eine einmal angenommene Bewegung, trotz der Einwirkung von Kräften, welche die Bewegung umzuändern suchen, beibehält.

So ist z. B. ein auf einem Tische ruhender oder ein an einem Faden hängender Körper im Gleichgewicht mit dem auftretenden Gegendruck der Tischplatte oder mit der in dem Faden auftretenden Spannung. Entfernt man jedoch die Tischplatte oder durchschneidet man den Faden, so wird damit das Gleichgewicht gestört u. wird der Körper, dem Gesetze der Schwere folgend, fallen.

Die Lehre, welche die Bedingungen klarlegt, unter denen sich mehrere Kräfte das Gleichgewicht halten, heifst „Statik", während die Lehre, welche von der Bewegung der Körper handelt, „Dynamik" genannt wird.

Erstes Kapitel.

Die verschiedenen Bewegungsarten.

Bewegung ist die Ortsveränderung eines räumlichen Gegenstandes. Die Reihenfolge der Orte im Raume, welche ein bewegter Gegenstand nach einander annimmt, nennt man seinen Weg oder seine Bahn.

Die Richtung einer Bewegung ist entweder veränderlich oder unveränderlich; im ersten Fall nennt man die Bewegung eine krummlinige, im zweiten Fall eine geradlinige.

Die Bewegung selbst kann wieder eine gleichförmige oder ungleichförmige sein, je nachdem bei der Bewegung in beliebig gleichen Zeitabschnitten gleiche oder ungleiche Wege zurückgelegt werden.

Bei der Bewegung eines Körpers können folgende Fälle eintreten:

1) Alle Punkte bewegen sich in gleicher Richtung; (einfach fortschreitende Bewegung).

2) Die Punkte bewegen sich um eine ruhende Gerade in konzentrischen Kreisen; (einfach drehende Bewegung).

3) Die Punkte bewegen sich um eine fortschreitende Gerade; (drehend fortschreitende Bewegung).

Bei der einfach fortschreitenden Bewegung eines bestimmten Punktes wird der Weg gemessen durch die Länge der Linie, welche den Weg bildet.

Bei der drehenden Bewegung wird der Weg gemessen entweder durch den am Mittelpunkt der Drehung von einem bestimmten Radius gebildeten Winkel, oder durch die Länge des diesem Winkel zugehörigen Bogens, dessen Radius die Einheit ist; oder durch die Anzahl der in bestimmter Zeit vollendeten Umdrehungen.

Die Geschwindigkeit einer jeden Bewegung wird gemessen durch den Weg, welchen die als gleichförmig gedachte Bewegung in der Zeiteinheit (der Sekunde) hervorbringen würde.

Ist die Geschwindigkeit veränderlich, so tritt entweder eine beschleunigte oder eine verzögerte Bewegung ein. Beschleunigung oder Verzögerung können wieder gleichförmig oder ungleichförmig sein.

Gleichförmig beschleunigt oder verzögert nennt man eine Bewegung, wenn die zurückgelegten Wege in gleichen Zeiten immer um das Gleiche zu- oder abnehmen. Ist die Zu- oder Abnahme ungleich, so nennt man die Bewegung eine ungleichförmig beschleunigte oder ungleichförmig verzögerte.

Gleichförmige Bewegung.

Die Länge des Raumes, welchen ein Körper während seiner Bewegung durchläuft, nennt man seinen Weg. Legt der Körper in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück, so ist seine Bewegung eine gleichförmige.

Die Gröfse oder Stärke der Bewegung wird durch die Geschwindigkeit gemessen, mit welcher die Bewegung stattgefunden hat. Man versteht unter Geschwindigkeit den Weg, welchen ein Körper in der Zeiteinheit — in einer Sekunde — zurücklegt.

Häufig giebt man aber auch die Geschwindigkeit in anderen Zeiteinheiten als in Sekunden an. Zu Angaben über die Umdrehungszahl eines Rades, der Hubzahl einer Maschine u. s. w. benützt man gewöhnlich die Minute; zu Angaben

über die Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges, eines Schiffes u. s. w. die Stunde als Zeiteinheit. Immer steht die Gröfse der Zeiteinheit im Verhältnis zur Gröfse der Geschwindigkeiten oder zur Gröfse der Wege.

Es kommen, wie ersichtlich, bei der gleichförmigen Bewegung nur die drei Gröfsen: Zeit, Geschwindigkeit und Weg in betracht.

Hat ein in gleichförmiger Bewegung befindlicher Körper eine Geschwindigkeit von 10 m, legt er also in jeder einzelnen Sekunde einen Weg von 10 m Länge zurück, so wird er in einer Sekunde 1 mal 10 m, in 2 Sekunden 2 mal 10 m, in 5 Sekunden 5 mal 10 m, in 100 Sekunden 100 mal 10 m u. s. w. fortgeschritten sein.

Bezeichnet man jetzt allgemein mit

t die Zeit, während welcher die Bewegung vor sich geht;

s den Weg, welcher in dieser Zeit t zurückgelegt wird;

v die Geschwindigkeit, mit welcher der Körper sich fortbewegt, so ist der zurückgelegte

Weg: $s = v \cdot t$ = Geschwindigkeit mal Zeit . . . 1)

d. h. der zurückgelegte Weg ist gleich dem Produkt aus Geschwindigkeit und Zeit. Hieraus erhält man ferner die

$$\text{Zeit: } t = \frac{s}{v} = \frac{\text{Weg}}{\text{Geschwindigkeit}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

$$\text{Geschwindigkeit: } v = \frac{s}{t} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Beispiele: *)

1) Auf einem Flusse schwimmt ein Körper in 45 Sekunden 36 Meter weit. Wie grofs ist die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche?

Gegeben ist: $t = 45$ Sekunden und $s = 36$ Meter.

Mithin nach Formel 3): $v = \frac{s}{t} = \frac{36}{45} = 0{,}8$ Meter pro Sekunde.

2) Welchen Weg legt eine Lokomotive in 30 Minuten zurück, wenn sie sich mit einer Geschwindigkeit von 12 Meter pro Sekunde gleichmäfsig fortbewegt?

Gegeben ist: $t = 30 \cdot 60 = 1800$ Sekunden und $v = 12$ Meter.

Mithin nach Formel 1): $s = v \cdot t = 12 \cdot 1800 = 21600$ Meter.

3) Ein Eisenbahnzug bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 9 Meter fort; welchen Weg legt er in einer Stunde und 15 Min. zurück?

Gegeben ist: $v = 9$ und $t = 75 \cdot 60 = 4500$ Sek.

Mithin nach Formel 1): $s = v \cdot t = 9 \cdot 4500 = 40500$ Meter.

4) Welche Zeit braucht ein Pferd, um 21 Kilometer = 21000 Meter zurückzulegen, wenn es sich mit einer Geschwindigkeit von 5 Meter bewegt?

---

*) Über die Resultate sämtlicher nun folgenden Beispiele ist zu bemerken, dafs da, wo die Resultate in Form von Dezimalbrüchen gegeben sind, die letzte Stelle derselben um 1 erhöht worden ist, wenn die folgende, nicht angegebene Stelle = 5 oder gröfser als 5 war. Ergab sich die betreffende Stelle kleiner als 5, so blieb die vorhergehende Stelle unverändert.

Gegeben ist: $s = 21000$ Meter; $v = 5$ Meter.

Mithin nach Formel 2): $t = \frac{s}{v} = \frac{21000}{5} = 4200$ Sek. $= 1$ Std. 10 Min.

5) Ein Fahrstuhl gebraucht 4 Minuten Zeit, um eine Höhe von 72 Meter zu erreichen; mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich derselbe?

Gegeben ist: $t = 4 \cdot 60 = 240$ Sek.; $s = 72$ Meter.

Mithin nach Formel 3): $v = \frac{s}{t} = \frac{72}{240} = 0{,}3$ Meter pro Sek.

6) Das Bett einer Eisenhobelmaschine, welches sich vorwärts und rückwärts mit gleicher Geschwindigkeit bewegt und bei jedem Zuge einen Weg von 2 Meter zurücklegt, macht in jeder Minute 4 Doppelzüge, d. h. es geht 4mal vorwärts und 4mal rückwärts. Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Bett?

Gegeben ist: Weg in 1 Min. $s = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 16$ Meter
und die Zeit $t = 1$ Min. $= 60$ Sek.

Mithin nach Formel 3): $v = \frac{s}{t} = \frac{16}{60} = 0{,}267$ Meter pro Sek.

7) Eine Richtplatte von 2 Meter Länge und 0,5 Meter Breite soll einmal überhobelt werden. Der Schlitten der Hobelmaschine hat eine Geschwindigkeit von 0,09 m, die Breite des Spanes beträgt 0,004 m. Welche Zeit ist hierzu erforderlich?

Der Inhalt der abzuhobelnden Fläche ist: $2 \cdot 0{,}5 = 1$ qm.

In einer Sek. wird eine Fläche bearbeitet von $0{,}09 \cdot 0{,}004 = 0{,}00036$ qm.

Folglich ist zum einmaligen Überhobeln der Platte eine Zeit von

$$\frac{1}{0{,}00036} = 2778 \text{ Sek.} = 46 \text{ Min. } 18 \text{ Sek. erforderlich.}$$

Geht bei der gleichförmigen Bewegung eines Körpers die geradlinige Richtung des Weges in eine kreisförmige über, so dafs alle Punkte des Körpers um eine mit demselben festverbunden gedachte Achse Kreise beschreiben, so entsteht die drehende oder rotierende Bewegung (Wasserad, Schwungrad, Zahnrad, Kurbel, Excenter u. s. w.) und zwar werden diejenigen Punkte, welche am weitesten von dem Mittelpunkte der Achse entfernt liegen, den gröfsten Weg zurücklegen, während derselbe gegen den Mittelpunkt hin immer mehr abnimmt und im Mittelpunkt selbst gleich Null wird.

Den Weg, welchen ein Punkt hierbei in einer bestimmten Entfernung vom Mittelpunkt in einer Sekunde zurücklegt, nennt man seine Umfangsgeschwindigkeit.

Will man daher diese Geschwindigkeit genau bestimmen, so ist immer anzugeben für welchen Punkt des rotierenden Körpers sie bestimmt werden soll, z. B. für den Umfang eines Schwungrades, einer Riemenscheibe; für den Teilkreis eines Zahnrades u. s. w.

Bezeichnet man mit

d den Durchmesser des von dem betreffenden Punkte durchlaufenen Kreises;

n die Anzahl der Umdrehungen pro Minute, so ist der Weg bei einer Umdrehung

$= \pi \cdot d$, das heifst gleich dem Umfange des Kreises, und mithin in einer Minute bei n Umdrehungen

$= \pi \cdot d \cdot n$; mithin die Umfangsgeschwindigkeit pro Sek.

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} \quad \ldots \quad 4)$$

woraus folgt: $$d = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot n} \quad \ldots \quad 5)$$

$$n = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot d} \quad \ldots \quad 6)$$

Bezeichnet man ferner mit

n die Anzahl der Umdrehungen der Kurbel einer Dampfmaschine pro Minute;

s den einfachen Kolbenhub in Metern,

so ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit pro Sek.

$$v = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60} \quad \ldots \quad 7)$$

folglich: $$n = \frac{60 \cdot v}{2 \cdot s} \quad \ldots \quad 8)$$

$$s = \frac{60 \cdot v}{2 \cdot n} \quad \ldots \quad 9)$$

Beispiele:

1) Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit einer Riemenscheibe von 2 Meter Durchmesser, wenn dieselbe 120 Umdrehungen pro Min. macht?

Nach Formel 4) erhält man:

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{3{,}14 \cdot 2 \cdot 120}{60} = 12{,}56 \text{ Meter.}$$

2) Wie viel Umdrehungen pro Minute macht ein Schwungrad von 2,5 Meter Durchmesser, wenn dessen Umfangsgeschwindigkeit 7 Meter beträgt?

Nach Formel 6) erhält man:

$$n = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot d} = \frac{60 \cdot 7}{3{,}14 \cdot 2{,}5} = 53{,}50 \text{ Umdrehungen.}$$

3) Welchen Durchmesser erhält ein Zahnrad, wenn dessen Umfangsgeschwindigkeit im Teilkreis 7,85 Meter beträgt und das Rad 150 Umdrehungen pro Minute machen soll?

Nach Formel 5) erhält man:

$$d = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot n} = \frac{60 \cdot 7{,}85}{3{,}14 \cdot 150} = 1 \text{ Meter.}$$

4) Wie grofs ist die mittlere Geschwindigkeit des Kolbens einer Dampfmaschine, wenn die Kurbel 46 Umdrehungen pro Minute macht und der einfache Kolbenhub 1,2 Meter beträgt?

Nach Formel 7) erhält man:

$$v = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot 1{,}2 \cdot 46}{60} = 1{,}84 \text{ Meter.}$$

5) Wieviel Umdrehungen pro Minute macht die Kurbel einer Dampfmaschine, wenn die mittlere Kolbengeschwindigkeit 2,5 Meter und der Kolbenhub 1,5 Meter betragen?

Nach Formel 8) erhält man:

$$n = \frac{60 \cdot v}{2 \cdot s} = \frac{60 \cdot 2{,}5}{2 \cdot 1{,}5} = 50 \text{ Umdrehungen.}$$

6) Bei einer Pumpe, welche 40 Doppelhübe pro Minute macht, be- e die mittlere Kolbengeschwindigkeit 0,4 Meter. Welchen Kolbenhub zt diese Pumpe?

Nach Formel 9) erhält man:

$$s = \frac{60 \cdot v}{2 \cdot n} = \frac{60 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 40} = 0{,}3 \text{ Meter.}$$

---

sammenstellung einiger mittleren Geschwindigkeiten pro Sekunde:

gänger	1,3	Meter
d im Schritt	1,0	„
„ Trab	2,1	„
„ Galopp	4,5	„
sch am Göpel	0,6	„
, an der Kurbel	0,8	„
e am Göpel	0,6	„
rzug	12,0	„
onenzug	15,0	„
ellzug	20,0	„
ampfer	5,0	„
ser der meisten Flüsse	0,8	„
in Leitungen	1,0	„
im Saugrohr der Pumpen	1,0	„
„ Steigrohr „ „	1,2	„
d in Gebläseleitungen	10,0	„
gewöhnlicher	3,0	„
günstig für Windmühlen	6,5	„
Luft in Leitungen	2,7	„
mwind	15,0	„
n	30,0	„
serräder	1,5	„
lsteine	8,0	„
eifsteine für Werkzeuge	9,0	„
el der Ventilatoren am Umfange	36,0	„
ssäge für Holz und heifses Eisen am Umfange	40,0	„
blatt einer Balkensäge	2,0	„
„ „ Fourniersäge	10,0	„
„ „ Bandsäge für Holz	9,0	„
„ „ „ „ Eisen	1,3	„
tten einer Metallhobelmaschine	0,1	„
eidzeug einer Holzhobelmaschine, drehend	12,0	„
ehen gufseiserner Stücke am Umfang	0,08	„
„ schmiedeeiserner Stücke am Umfang	0,12	„
er, am Umfang für Schmiede- und Gufseisen		
für Löcher bis 6 mm Durchmesser	0,18	„
„ „ von 6—25 mm Durchmesser	0,14	„
„ gröfsere Löcher	0,10	„
er Eisendraht beim Ziehen	0,20	„
acher „ „ „	1,30	„
taube im Fluge	18,0	„

Büchsen der Rohrpost in Berlin	17,0 Meter
Schall in der Luft	333,0 „
Erdäquator-Umfangsgeschw.	464,0 „
Erde auf ihrer Bahn um die Sonne	30000,0 „
Licht und Electricität	300000000,0 „

Übungsbeispiele:*)

1) Welche Zeit braucht ein Fufsgänger um 7 km zu durchlaufen, wenn seine mittlere Geschwindigkeit 1,4 m beträgt?
Lösung: t = 1 Std. 23 Min. 20 Sek.

2) Ein Fahrstuhl bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 0,25 m. Welche Höhe erreicht derselbe in 3 Min.?
Lösung: s = 45 m.

3) Wie grofs ist die mittlere Geschwindigkeit eines Dampfschiffes, wenn dasselbe in einer Stunde 18000 m zurücklegt?
Lösung: v = 5 m pro Sekunde.

4) Zwischen Blitz und Knall einer Kanone vergeht ein Zeitraum von 3,8 Sekunden. In welcher Entfernung steht die Kanone vom Beobachter, wenn die Geschwindigkeit des Schalles zu 333 m angenommen wird?
Lösung: s = 1265,4 m.

5) Welche Zeit braucht ein Radfahrer, um bei einer Geschwindigkeit von 5 m einen Weg von 12 km zurückzulegen?
Lösung: t = 40 Minuten.

6) Welche Entfernung kann ein guter Schlittschuhläufer bei 9 m Geschwindigkeit in 2 Stunden durcheilen?
Lösung: s = 8,64 Meilen.

7) Welchen Durchmesser erhält ein Wasserrad, wenn die Umfangsgeschwindigkeit = 1,5 m und die Umdrehungszahl = 10 betragen soll?
Lösung: d = 2,866 m.

8) Eine schmiedeeiserne Welle von 80 mm Durchmesser soll abgedreht werden, die Umfangsgeschwindigkeit soll 0,13 m betragen. Wie viel Umdrehungen mufs die Welle in der Minute machen, um diese Geschwindigkeit zu erreichen?
Lösung: n = 31 Umdrehungen.

9) Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit eines Rades von 1,5 m Durchmesser, wenn dasselbe 80 Umdrehungen pro Minute macht?
Lösung: v = 6,28 m.

10) Eine Dampfmaschine macht 50 Umdrehungen in jeder Minute; der Kurbelhalbmesser sei = 0,4 m. Wie grofs ist die mittlere Geschwindigkeit des Kurbelzapfens?
Lösung: v = 2,09 m.

11) Wieviel Umdrehungen in einer Minute hat eine Drehbank bei dem Abdrehen einer Riemenscheibe von 1 m Durchmesser zu machen, wenn die beste Schnittgeschwindigkeit 75 mm beträgt?
Lösung: n = 1,43 Umdrehungen.

---

*) Bei dem Lösen der Übungsbeispiele ist namentlich von dem Anfänger streng zu beachten, dafs die Werte für Weg, Zeit und Geschwindigkeit stets in den richtigen Einheiten eingesetzt werden, also Wege und Geschwindigkeiten stets in Meter und Zeiten stets in Sekunden.

12) Welche Zeit erfordert das Abdrehen einer 80 mm starken und ,5 m langen Welle, bei einer Schnittgeschwindigkeit von 100 mm und iner Schnittbreite von 1,0 mm?

Lösung: t = 3,1 Stunden.

13) Wie viel Doppelhübe pro Minute mufs eine Pumpe machen, venn die Kolbengeschwindigkeit 0,5 m und der Kolbenhub 0,3 m betragen soll?

Lösung: n = 50 Umdrehungen.

14) Wie grofs ist die mittlere Kolbengeschwindigkeit einer Dampfnaschine, wenn die Kurbel 80 Umdrehungen pro Minute macht und der Kolbenhub 0,8 m beträgt?

Lösung: v = 2,13 m.

Zweites Kapitel.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Wurde einem Körper durch die Einwirkung einer Kraft ine gewisse Geschwindigkeit mitgeteilt und hört die Wirkung ieser Kraft plötzlich auf, so würde der Körper, infolge seines Beharrungsvermögens, mit dieser einmal erlangten Geschwindigeit sich weiter fortbewegen, wenn keine Hindernisse vorianden wären. Wirkt die Kraft andauernd, so wird der Körper nach Verlauf einer Sekunde eine bestimmte Geschwindigeit erreichen. Nimmt diese Geschwindigkeit für alle aufinanderfolgenden Sekunden um das Gleiche zu, so wird die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte, und nennt nan diese Geschwindigkeitszunahme des Körpers in einer jeden ekunde seine Beschleunigung.

Bezeichnet man mit v die Endgeschwindigkeit, welche in Körper nach Verlauf von t Sekunden erreicht hat, und nit p die durch die Einwirkung einer Kraft erlangte Beschleunigung pro Sekunde, so ist diese Endgeschwindigkeit v

nach der 1ten Sekunde = 1 p,
„ „ 2ten „ = 2 p,
„ „ 3ten „ = 3 p,
„ „ 10ten „ = 10 p u. s. w.

lso nach t Sekunden:

$$v = t \cdot p = p \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 10)$$

Der Weg s, welchen der Körper bei dieser Art der Bewegung zurücklegt, ergiebt sich aus folgender Betrachtung:

Wollte man, dafs der Körper bei gleichförmiger Bewegung den Weg s in derselben Zeit zurücklegen sollte, wie ei der beschleunigten Bewegung, so müfste er sich mit einer mittleren Geschwindigkeit fortbewegen, welche sich aus

der Anfangs- und Endgeschwindigkeit des mit beschleunigter Bewegung fortschreitenden Körpers ergiebt.

Geht aber ein Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der beschleunigten Bewegung über, so ist seine Anfangsgeschwindigkeit = 0 = Null; die nach t Sekunden durch die Beschleunigung p erlangte Endgeschwindigkeit nach Formel 10) $v = p \cdot t$, mithin seine mittlere Geschwindigkeit $= \frac{0 + pt}{2} = \frac{p \cdot t}{2}$, und somit der in t Sekunden zurückgelegte Weg:

$$s = \frac{p \cdot t}{2} \cdot t = \frac{p \cdot t^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 11)$$

Aus der Gleichung $v = pt$ erhält man $p = \frac{v}{t}$ und $t = \frac{v}{p}$; setzt man diesen Wert für p in Gleichung 11) ein, so folgt:

$$s = \frac{v}{t} \cdot \frac{t^2}{2} = \frac{v \cdot t \cdot t}{2 \cdot t} = \frac{v \cdot t}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 12)$$

oder den Wert $t = \frac{v}{p}$ in Gleichung 12) für t eingesetzt, noch als dritter Wert für den zurückgelegten Weg:

$$s = \frac{v}{2} \cdot \frac{v}{p} = \frac{v^2}{2p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 13)$$

und hieraus $v = \sqrt{2ps}$ . . . . . 14)

Hatte der Körper in dem Augenblick, wo die Beschleunigung begann, schon eine Anfangsgeschwindigkeit c, so ist seine nach t Sekunden erreichte Endgeschwindigkeit:

$$v = c + p \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 15)$$

und der in diesen t Sekunden zurückgelegte Weg:

$$\text{I)} \quad s = ct + \frac{pt^2}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 16)$$

$$\text{II)} \quad s = \left(\frac{c + v}{2}\right) \cdot t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 17)$$

$$\text{III)} \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2p} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 18)$$

folglich: $v = \sqrt{c^2 + 2ps}$ . . . . . 19)

Beispiele:

1) Ein Körper hat durch Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung von 2 m erlangt; welche Endgeschwindigkeit hat derselbe nach 10 Sekunden erreicht?

Nach Formel 10) erhält man:

$$v = pt = 2 \cdot 10 = 20 \text{ m}.$$

2) Welchen Weg hat derselbe Körper in diesen 10 Sekunden zurückgelegt?

Nach Formel 11) erhält man:

$$s = \frac{pt^2}{2} = \frac{2 \cdot 10^2}{2} = 100 \text{ m},$$

oder nach Formel 12):

$$s = \frac{vt}{2} = \frac{20 \cdot 10}{2} = 100 \text{ m}.$$

3) Ein Körper hat bei gleichförmig beschleunigter Bewegung in 6 Sekunden einen Weg von 50,4 m zurückgelegt; wie grofs ist seine Beschleunigung?

Aus Formel 11) $s = \frac{pt^2}{2}$ erhält man durch Umformung:

$$p = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \cdot 50{,}4}{6 \cdot 6} = \frac{100{,}8}{36} = 2{,}8 \text{ m}.$$

4) Durch gleichförmige Beschleunigung ist ein Wagen in 8 Minuten aus einer Geschwindigkeit von 1,4 m in eine solche von 3,6 m versetzt worden; welchen Weg hat der Wagen in dieser Zeit zurückgelegt?

Nach Formel 17) erhält man:

$$s = \left(\frac{c + v}{2}\right) \cdot t = \left(\frac{1{,}4 + 3{,}6}{2}\right) \cdot 8 \cdot 60 = \frac{5}{2} \cdot 480 = 1200 \text{ m}.$$

5) Ein Körper hat eine Anfangsgeschwindigkeit von 8 m und erfährt in jeder Sekunde eine Beschleunigung von 1,5 m; welche Geschwindigkeit wird derselbe nach Verlauf von 4 Sekunden erreicht haben?

Nach Formel 15) erhält man:

$$v = c + pt = 8 + 1{,}5 \cdot 4 = 14 \text{ m}.$$

6) Welche Endgeschwindigkeit erreicht ein Körper, welcher durch eine Beschleunigung von 1,3 m einen Weg von 60 m zurückgelegt hat?

Nach Formel 14) erhält man:

$$v = \sqrt{2ps} = \sqrt{2 \cdot 1{,}3 \cdot 60} = 12{,}49 \text{ m}.$$

Übungsbeispiele:

1) Eine von einer schiefen Ebene herabrollende Kugel hat am Anfange der Bewegung schon eine Gesehwindigkeit von 10 m und erhält beim Herabrollen eine Beschleunigung von 2 m. Wie grofs ist die Geschwindigkeit der Kugel nach 4 Sekunden?

Lösung: $v = 18$ m.

2) Ein Körper besitzt eine Geschwindigkeit von 6 m und erhält durch Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung von 2 m. Welchen Weg hat der Körper nach Verlauf von 20 Sekunden zurückgelegt?

Lösung: $s = 520$ m.

3) Ein Körper hat durch Einwirkung einer Kraft eine Beschleunigung von 1,5 m erlangt; nach welcher Zeit wird der Körper eine Endgeschwindigkeit von 30 m erreicht haben?

Lösung: $t = 20$ Sekunden.

4) Welche Beschleunigung erhält eine Kanonenkugel in dem Laufe eines 5 m langen Geschützes, wenn sie mit einer Geschwindigkeit von 450 m bei der Mündung ankommt?

Lösung: $p = 20250$ m.

5) Wie grofs ist die Beschleunigung eines Steines, welcher 7 Sekunden braucht, um einen 240,5 m tiefen Schacht zu durchfallen?

Lösung: $p = 9{,}81$ m.

6) Ein Eisenbahnzug geht aus der Ruhe in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung über, so dafs derselbe in 40 Sekunden einen Weg von 200 m zurückgelegt hat. Wie grofs ist seine Beschleunigung und seine Geschwindigkeit nach 40 Sekunden?

Lösung: $p = 0{,}25$ m.
$v = 10$ m.

Drittes Kapitel.

Gleichförmig verzögerte Bewegung.

Tritt der Bewegung eines Körpers ein andauernder Widerstand entgegen, so wird die Bewegung eine Verzögerung erleiden. Nimmt diese Geschwindigkeitsverminderung wieder in gleichen Zeiten um das Gleiche zu, so wird die Bewegung eine gleichförmig verzögerte.

Bezeichnet man mit

c die Anfangsgeschwindigkeit eines Körpers;
p die Geschwindigkeitsabnahme in einer Sekunde;
t die Zeit, in welcher der Körper zur Ruhe kommt, so ist:

$$c = p \cdot t \quad \ldots \quad 20)$$

da durch die Verzögerung $p \cdot t$ die Geschwindigkeit c aufgezehrt werden muſs. Ferner der in t Sekunden zurückgelegte Weg:

$$\text{I)}\ s = \frac{p}{2} \cdot t^2 \quad \ldots \quad 21)$$

$$\text{II)}\ s = \frac{c \cdot t}{2} \quad \ldots \quad 22)$$

$$\text{III)}\ s = \frac{c^2}{2p} \quad \ldots \quad 23)$$

Die nach t Sekunden erlangte Endgeschwindigkeit eines Körpers, welcher eine Anfangsgeschwindigkeit c hat, wird daher sein:

$$v = c - p \cdot t \quad \ldots \quad 24)$$

und der in diesen t Sekunden zurückgelegte Weg:

$$\text{I)}\ s = ct - \frac{p}{2} \cdot t^2 \quad \ldots \quad 25)$$

$$\text{II)}\ s = \left(\frac{c + v}{2}\right) \cdot t \quad \ldots \quad 26)$$

$$\text{III)}\ s = \frac{c^2 - v^2}{2p} \quad \ldots \quad 27)$$

Beispiele:

1) Ein Eisenbahnzug hat eine Geschwindigkeit von 12 m; derselbe wird nun derartig gebremst, daſs seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 0,75 m abnimmt. Wie groſs wird seine Geschwindigkeit noch nach 6 Sekunden sein?

Nach Formel 24) erhält man:

$$v = c - pt = 12 - 0{,}75 \cdot 6 = 7{,}5 \text{ m}.$$

2) In welcher Zeit wird dieser Zug zum Stillstand gelangen?

Aus Formel 20) $c = pt$ erhält man durch Umformung:

$$t = \frac{c}{p} = \frac{12}{0{,}75} = 16 \text{ Sekunden}.$$

3) Welchen Weg hat dieser Eisenbahnzug, vom Moment des Bremsens an gerechnet, bis zum Stillstand zurückgelegt?

Nach Formel 23) erhält man:

$$s = \frac{c^2}{2p} = \frac{12^2}{2 \cdot 0{,}75} = 96 \text{ m}.$$

4) Ein Eisenbahnzug geht mit einer Geschwindigkeit von 16 m von einer Station A ab und erleidet pro Sekunde eine gleichförmige Verzögerung von 0,05 m; derselbe kommt an einer Station B mit einer Geschwindigkeit von 3 m an. Wie weit war A von B entfernt?

Nach Formel 27) erhält man:

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2p} = \frac{16^2 - 3^2}{2 \cdot 0{,}05} = 2470 \text{ m}.$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Eisenbahnzug hat eine Geschwindigkeit von 14 m. Nachdem die Maschine abgestellt wurde, bewegte er sich noch 3000 m fort, ehe er zur Ruhe kam. Wie grofs ist die Verzögerung des Zuges in einer Sekunde?

Lösung: $p = 0{,}0326$ m.

2) Eine auf einer Ebene fortrollende Kugel hat eine Geschwindigkeit von 8,62 m; ihre Geschwindigkeit wird aber durch die Bewegungshindernisse in jeder Sekunde um 0,04 m vermindert. Nach welcher Zeit hat die Kugel eine Geschwindigkeit von 4 m erreicht?

Lösung: $t = 115{,}5$ Sekunden.

3) Welchen Weg legt die Kugel in vorstehender Aufgabe in den 115,5 Sekunden zurück?

Lösung: $s = 728{,}8$ m.

Viertes Kapitel.

Freier Fall der Körper.

Fällt ein Körper im luftleeren Raume aus nicht ungewöhnlicher Höhe frei herab, so nimmt derselbe infolge der Anziehungskraft der Erde eine gleichförmig beschleunigte Bewegung an, und hat man gefunden, dafs dieser Körper in einer Sekunde einen Weg von 4,905 m Länge durchfällt. Es ist daher die Endgeschwindigkeit oder die Beschleunigung des Körpers nach Verlauf einer Sekunde doppelt so grofs, d. h. = 9,81 m (nach Formel 12), welcher Wert allgemein mit dem Buchstaben **g** bezeichnet wird.

Die vorstehenden Formeln für die gleichförmig beschleunigte Bewegung finden auch hier ihre Anwendung, und ist eben nur für p die Fallbeschleunigung $g = 9{,}81$ zu setzen.

Wird ein Körper mit einer bestimmten Anfangsgeschwindigkeit senkrecht in die Höhe geworfen, so wird diese Geschwindigkeit in jeder Sekunde um ebensoviel abnehmen, als sie beim Fallen des Körpers zugenommen hat.

Es gebraucht daher ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper genau soviel Zeit zum Steigen als zum Fallen. Ist der vertikal aufwärts geworfene Körper 12 Sekunden ausgeblieben, so ist er 6 Sekunden lang gestiegen und 6 Sekunden lang gefallen, und würde deshalb nach der Gleichung $s = \frac{g}{2} t^2$ einen Weg $s = \frac{9{,}81}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 176{,}58$ m zurückgelegt haben.

Es ist mithin die Gröfse des Weges, welchen ein Körper seit Anfang der Bewegung durchfällt:

In einer Sekunde . . . . = $1 \cdot \frac{g}{2}$
„ 2 Sekunden . . . = $4 \cdot \frac{g}{2}$
„ 3 „ „ . . . . = $9 \cdot \frac{g}{2}$
„ 4 „ „ . . . . = $16 \cdot \frac{g}{2}$
„ 5 „ „ . . . . = $25 \cdot \frac{g}{2}$
„ t „ „ . . . . = $t^2 \cdot \frac{g}{2}$

nach Formel 11): $s = \frac{g}{2} t^2$.

Man ersieht hieraus, dafs der mit gleichförmiger Beschleunigung durchfallene Weg mit dem Quadrat der Zeit zunimmt, d. h. in 2 Sekunden wird ein 4 mal gröfserer, in 3 Sekunden ein 9 mal gröfserer, in 10 Sekunden ein 100 mal gröfserer Weg zurückgelegt, als in einer Sekunde.

Der Fallraum in einer beliebigen einzelnen Sekunde wird erhalten, wenn man von dem ganzen Fallraum, welchen der Körper bis zu Ende dieser beliebig angenommenen Sekunde durchfallen hat, denjenigen der vorhergehenden Sekunde subtrahiert. Demnach ergeben sich die Fallräume:

In der ersten Sekunde . . . . . $\frac{g}{2} = 1\frac{g}{2}$.
„ „ 2ten „ „ . . $4\frac{g}{2} - 1\frac{g}{2} = 3\frac{g}{2}$.
„ „ 3ten „ „ . . $9\frac{g}{2} - 4\frac{g}{2} = 5\frac{g}{2}$.
„ „ 4ten „ „ . . $16\frac{g}{2} - 9\frac{g}{2} = 7\frac{g}{2}$.
„ „ 5ten „ „ . . $25\frac{g}{2} - 16\frac{g}{2} = 9\frac{g}{2}$ u. s. w.

Aus Vorstehendem setzt sich folgende Tabelle über den freien Fall der Körper zusammen:

Anzahl der Sekunden t	Endgeschwindigkeit v in m	Fallraum in den einzelnen Sekunden in m	Ganzer Fallraum seit Anfang der Bewegung in m	Hauptformeln:
1	g	$\frac{g}{2}$	$\frac{g}{2}$	$v = gt$; $t = \frac{v}{g}$.
2	2g	$3\frac{g}{2}$	$4\frac{g}{2}$	$s = \frac{gt^2}{2}$; $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$.
3	3g	$5\frac{g}{2}$	$9\frac{g}{2}$	
4	4g	$7\frac{g}{2}$	$16\frac{g}{2}$	$v = \sqrt{2gs}$; $s = \frac{v^2}{2g}$.
t	tg	$(2t - 1)\frac{g}{2}$	$t^2\frac{g}{2}$	

Beispiele:

1) Welchen Raum durchfällt ein Körper in 8 Sekunden, und welche Endgeschwindigkeit hat derselbe erlangt?

Nach Formel 11) erhält man:

$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2 = \frac{9{,}81}{2} \cdot 64 = 313{,}92 \text{ m.}$$

Die Endgeschwindigkeit bestimmt sich aus Formel 10):

$$v = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 8 = 78{,}48 \text{ m.}$$

2) Welche Endgeschwindigkeit erreichte ein Körper, der 60 m durchfallen hat, und welche Zeit gebrauchte derselbe hierzu?

Nach Formel 14) erhält man:

$$v = \sqrt{2gs} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 60} = 34{,}31 \text{ m.}$$

Aus Formel 10) $v = g \cdot t$ erhält man die Zeit:

$$t = \frac{v}{g} = \frac{34{,}31}{9{,}81} = 3{,}5 \text{ Sekunden.}$$

3) Welche Anfangsgeschwindigkeit hatte ein Körper, welcher senkrecht in die Höhe geworfen wurde und 18 Sekunden lang ausblieb?

Nach Formel 20) erhält man:

$$c = g \cdot t = 9{,}81 \cdot 9 = 88{,}29 \text{ m.}$$

4) Welche Höhe hat dieser Körper erreicht?

Nach Formel 23) erhält man:

$$s = \frac{c^2}{2g} = \frac{88{,}29^2}{2 \cdot 9{,}81} = 397{,}31 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Dampfhammer wird 1,05 m hochgehoben und fällt dann frei herunter. Mit welcher Geschwindigkeit trifft er das zu schmiedende Eisenstück?

Lösung: $v = 4{,}54$ m.

2) Bei einer Handramme wird der Bär auf eine Höhe von 1,6 m gehoben. Mit welcher Geschwindigkeit stöfst derselbe bei dem Herabfallen gegen den Pfahl, und welche Zeit braucht er zum Herabfallen?

Lösung: $v = 5{,}6$ m. $t = 0{,}57$ Sekunden.

3) Wie hoch steigt ein Körper, der mit einer Geschwindigkeit von 40 m senkrecht in die Höhe geworfen wird, und welche Zeit braucht er zum Aufsteigen?

Lösung: $s = 81{,}55$ m. $t = 4{,}07$ Sekunden.

4) Ein Körper, welcher senkrecht in die Höhe geworfen wurde, kam nach 18,5 Sekunden zur Erde zurück. Wie grofs war die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers, und welche Höhe hatte er erreicht?

Lösung: $v = 90{,}74$ m. $s = 419{,}67$ m.

Von den Kräften.

Jede Ursache, welche einen Körper bewegt oder zu bewegen strebt, eine vorhandene Bewegung abändert oder abzuändern sucht, nennt man Kraft.

Die Kräfte werden gewöhnlich eingeteilt in bewegende Kräfte und in Widerstände. Erstere können Bewegung erzeugen oder verändern, letztere dagegen können Bewegungen

nur verhindern, mäfsigen oder gänzlich vernichten. Selbstverständlich kann jede bewegende Kraft auch als Widerstand auftreten.

Die Kräfte können durch verschiedene Ursachen erzeugt werden: Durch die Anziehungskraft der Erde; durch die Muskelkraft der Menschen und Tiere; durch den Stofs und Druck des Wassers, der Luft, des Dampfes; durch die Elastizität der Federn, d. i. der Eigenschaft derselben, sich auszudehnen oder zusammenzuziehen; durch die Wirkung der Elektrizität, des Magnetismus, u. s. w.

Die Schwerkraft wird ausgenützt bei Uhrwerken, Wasserrädern, Turbinen, Rammen u. s. w.

Die Elastizität gasförmiger Körper findet man verwertet als treibendes Prinzip unserer Dampf-, Luft-, Gaskraft-Maschinen, unserer Gewehre und Geschütze.

Zu den Widerständen rechnet man die Reibung, die Steifigkeit der Seile, die Festigkeit der Materialien u. s. w.

Die Gröfsen der Kräfte werden durch Gewichte gemessen.

Als Krafteinheit dient das Kilogramm; man spricht daher von einer Kraft von 10, 20, 30, 100 kg; d. h. die Wirkung dieser Kraft ist so grofs, wie der Zug oder Druck, welcher von einem Gewicht von 10, 20, 30, 100 kg ausgeübt wird.

Man sagt auch, eine Kraft irgend welcher Art habe eine Gröfse von z. B. 20 kg, wenn diese Kraft befähigt ist, ein Gewichtsstück von 20 kg senkrecht empor zu heben, oder schwebend zu erhalten.

Man hat bei der Wirkung der Kräfte nicht nur ihre Gröfsen, sondern auch ihre Richtung und die Lage des Angriffspunktes in Betracht zu ziehen.

Den Angriffspunkt einer Kraft kann man in der Richtung derselben beliebig verlegen, ohne die Wirkung der Kraft zu verändern.

Man kann auch die Kräfte bildlich (zeichnerisch) durch Linien darstellen. Die Länge der Linie giebt alsdann die Gröfse der Kraft, die Lage der Linie im Raume die Richtung, ein Pfeil an einem Ende der Linie den Richtungssinn und ein beliebiger Punkt, gewöhnlich ein Endpunkt der Linie, den Angriffspunkt der Kraft an.

Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf einen Körper, so wird es sich darum handeln, eine einzige Kraft aufzufinden und festzustellen, in welcher Richtung dieselbe zu wirken hätte, damit sie die gleiche Wirkung auf den Körper hervorbringt, wie die verschiedenen Kräfte zusammengenommen. Man nennt das Verfahren, Gröfse und Richtung dieser einzigen Kraft aufzufinden, das Zusammensetzen der Kräfte.

Handelt es sich hingegen darum, die Kräfte aufzusuchen, welche durch ihre gemeinschaftliche Thätigkeit dieselbe Wirkung auf einen Körper hervorbringen, wie eine einzelne Kraft, so nennt man dieses Verfahren das Zerlegen der Kräfte.

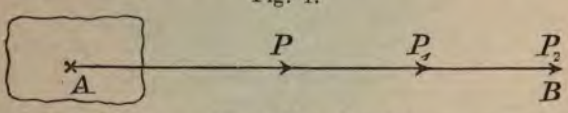
Die Kräfte, welche eine einzige Kraft zu ersetzen vermögen, nennt man Seitenkräfte oder Komponenten, und die eine Kraft, welche mehrere Kräfte zu ersetzen vermag, Mittelkraft oder Resultante.

Fünftes Kapitel.

Kräfte, welche auf einen Punkt wirken.

Wirken zwei oder mehrere Kräfte P, P_1, P_2 (Fig. 1) auf einen Punkt A eines Körpers in gerader Linie und nach einerlei Richtung, so ist ihre Mittelkraft gleich der Summe der einzelnen Kräfte P, P_1, P_2 und erfolgt die Bewegung nach derselben Richtung. Die Mittelkraft kann man sich in einem beliebigen Punkte der Linie AB wirksam denken. Bezeichnet man die Mittelkraft mit R, so ist:

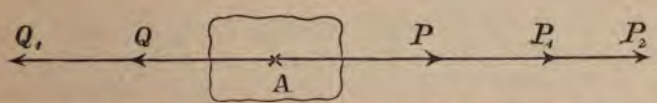
Fig. 1.



$$R = P + P_1 + P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 28)$$

Wirken mehrere Kräfte P, P_1, P_2, Q, Q_1 (Fig. 2) in gerader Linie, aber entgegengesetzt auf einen Punkt A eines

Fig. 2.



Körpers, so ist ihre Mittelkraft gleich der Summe der auf einer Seite wirkenden Kräfte, weniger der Summe der auf der anderen Seite entgegengesetzt wirkenden, und die Bewegung erfolgt nach der Richtung derjenigen Kräfte, deren Summe am gröfsten ist.

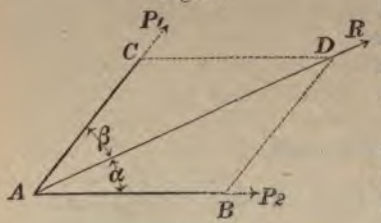
Ist $P + P_1 + P_2$ gröfser $Q + Q_1$, so ist die Mittelkraft:

$$R = (P + P_1 + P_2) - (Q + Q_1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 29)$$

Haben 2 Kräfte, P_1 und P_2, einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt A und bilden ihre Richtungslinien einen Winkel miteinander, so erhält man ihre Mittelkraft auf folgende Weise: Man trage auf den Richtungslinien der Kräfte Teile auf, welche sich der Gröfse nach zu einander verhalten wie diese Kräfte,

d. h. wäre $P_1 = 30$ kg und $P_2 = 50$ kg, so mache man AC = 30 mm und AB = 50 mm (Fig. 3, 4, 5), konstruiere mit Hilfe dieser Linien das Parallelogramm ABCD und ziehe die Diagonale AD, so stellt alsdann diese die Mittelkraft sowohl ihrer Gröfse wie ihrer Richtung nach vor.

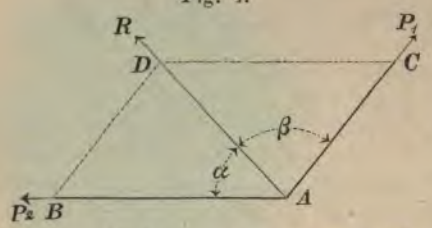
Fig. 3.



Mifst nun die Länge dieser Diagonale = 58,3 mm, so ist, da 1 kg durch 1 mm dargestellt wurde, die Mittelkraft auch = 58,3 kg.

Das durch diese Konstruktion erhaltene Parallelogramm heifst das Parallelogramm der Kräfte.

Fig. 4.



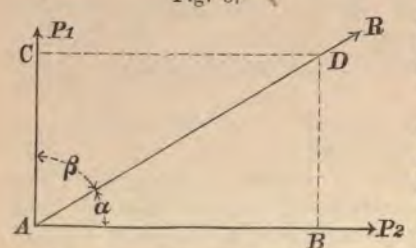
Einen Beweis für diesen sehr wichtigen Satz erhält man durch folgende Betrachtung:

Die Wirkungen beider Kräfte auf ein und denselben Körper in ein und derselben Zeit müssen im Verhältnisse zu ihrer Gröfse stehen; es müssen sich daher die Wege, welche die Kräfte den beeinflufsten Körper in ein und derselben Zeit durchlaufen lassen zu einander verhalten, wie die Kräfte selbst.

Durch die gleichzeitige Wirkung mehrerer Kräfte kann die Wirkung einer einzelnen Kraft nicht vernichtet werden; auf das Endergebnis hat die Einzelwirkung jeder Kraft stets entsprechenden Einfluſs.

Es wird daher immer dieselbe Wirkung erzielt, gleichgültig, ob die Kräfte alle zugleich eine gewisse Zeit wirken, oder ob sie einzeln, eine nach der anderen, in genau derselben Zeit thätig sind.

Fig. 5.



Wendet man das Gesagte für das Parallelogramm der Kräfte an, so ergiebt sich folgendes:

In der nämlichen Zeit, in welcher die Kraft P_2 den Körper von A nach B bewegt, wird ihn die Kraft P_1 von A nach C bewegen. Denkt man sich daher zunächst P_2 während jener Zeit allein wirksam, so wird dadurch der Körper von A nach B geführt und ist hierauf

die Kraft P_1 dieselbe Zeit allein thätig, so wird der Körper von B nach D bewegt, wobei angenommen ist, dafs BD parallel AC ist.

Die endliche Bewegung des Körpers ist mithin AD.

Dieselbe Bewegung wird aber ebenso durch gleichzeitige Thätigkeit beider Kräfte, als auch durch eine einzige Kraft = AD erzeugt.

Mithin mufs AD gleich der Mittelkraft der beiden Einzelkräfte P_1 und P_2 sowohl der Richtung, als auch der Gröfse nach sein.

Wirken die beiden Kräfte P_1 und P_2 unter einem rechten Winkel auf den Punkt A (Fig. 5), so ist die Gröfse der Mittelkraft leicht durch Rechnung zu finden, denn es ist:

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 \text{*)} \quad \ldots \quad 30)$$

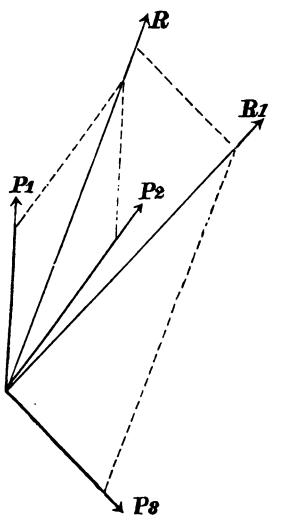
oder $R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} \quad \ldots \quad 31)$

Aus diesen Formeln erhält man:

$$P_1 = \sqrt{R^2 - P_2^2} \quad \ldots \quad 32)$$

$$P_2 = \sqrt{R^2 - P_1^2} \quad \ldots \quad 33)$$

Fig. 6.



Wirken mehr als zwei Kräfte unter bestimmten Winkeln auf einen Punkt (Fig. 6), so bildet man zuerst aus P_1 und P_2 die Mittelkraft R, aus R und P_3 die Mittelkraft R_1 u. s. w. Die zuletzt gefundene Kraft ist dann die Mittelkraft sämtlicher Kräfte.

Ist eine Kraft P gegeben und will man wissen, welche Wirkung dieselbe in einem Punkte eines Körpers nach zwei bestimmten Richtungen ausübt, so ist das Verfahren nur umzukehren, d. h. man konstruiere ein Parallelogramm, dessen Diagonale die gegebene Kraft P darstellt, und dessen Seiten durch die verlangten Richtungen bestimmt sind. Stehen die Seitenkräfte rechtwinkelig zu einander, so kann man auch hier durch Rechnung die Gröfse einer Seitenkraft finden, wenn die andere gegeben ist; es ist dann ebenfalls:

$$P_1 = \sqrt{R^2 - P_2^2}$$

$$P_2 = \sqrt{R^2 - P_1^2} \text{*)}$$

---

*) Pythagoräischer Lehrsatz: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypothenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Beispiele:

1) Zwei Kräfte, $P_1 = 10$ kg und $P_2 = 15$ kg, wirken unter einem Winkel von 60^0 auf einen Punkt A; wie grofs ist die Mittelkraft R, und welche Winkel bildet dieselbe mit den gegebenen Kräften?

Durch Konstruktion und mit Hilfe des Transporteurs erhält man:

$$R = 21{,}79 \text{ kg}; \quad \alpha = 23^0\ 10'; \quad \beta = 36^0\ 50'.$$

2) Es sind die beiden Kräfte $P_1 = 25$ kg und $P_2 = 60$ kg gegeben, welche einen Winkel von 40^0 einschliefsen; welche Winkel bildet die Mittelkraft mit den gegebenen Kräften und wie grofs ist dieselbe?

$$R = 80{,}76 \text{ kg}; \quad \alpha = 11^0\ 25'; \quad \beta = 28^0\ 35'.$$

3) Zwei Kräfte, $P_1 = 20$ kg und $P_2 = 35$ kg, wirken unter einem rechten Winkel auf einen Punkt A; wie grofs ist die Mittelkraft?

Aus Formel 31) erhält man:

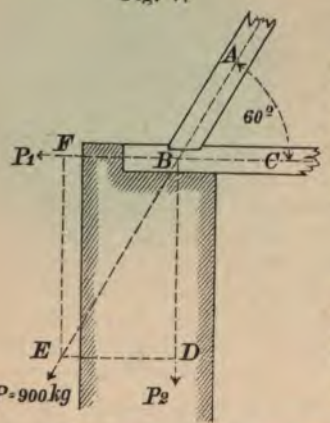
$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{20^2 + 35^2} = \sqrt{1625} = 40{,}31 \text{ kg}.$$

4) Drei Kräfte $P_1 = 300$ kg, $P_2 = 400$ kg und $P_3 = 500$ kg wirken auf einen Punkt. P_1 und P_2 bilden einen Winkel von 40^0, P_2 und P_3 einen Winkel von 50^0; wie grofs ist die Resultante dieser Kräfte?

Durch Konstruktion findet man:

$$R = 960 \text{ kg}.$$

Fig. 7.



5) An einem Punkte A eines Körpers wirken die Kräfte $P_1 = 25$ kg, $P_2 = 36$ kg, $P_3 = 40$ kg, $P_4 = 85$ kg. P_1 und P_2 bilden einen Winkel von 45^0, P_2 und P_3 einen solchen von 80^0, P_3 und P_4 einen Winkel von 70^0; wie grofs ist die Mittelkraft dieser Kräfte?

Durch Konstruktion findet man:

$$R = 66 \text{ kg}.$$

6) In der Richtung eines Dachsparrens (Fig. 7) wirkt unter einem Winkel von 60^0 ein Druck von 900 kg; es soll sowohl der Horizontalschub P_1 wie der Vertikaldruck P_2 bestimmt werden, welchen die Mauer auszuhalten hat.

Nimmt man auf der Richtungslinie der Kraft P ein Stück BE an, welches diese Kraft darstellen soll, und zieht man BD vertikal und BF horizontal, sowie von E aus DE parallel BF, und EF parallel BD, so stellt BD den Vertikaldruck und BF den Horizontalschub vor.

Durch Konstruktion ergiebt sich:

$$P_1 = 450 \text{ kg}.$$
$$P_2 = 779{,}4 \text{ kg}.$$

7) Die Neigung des Dachsparrens in vorstehender Figur betrage 45^0 und der in Punkt B auf die Mauer ausgeübte Druck 2050 kg; wie grofs sind P_1 und P_2?

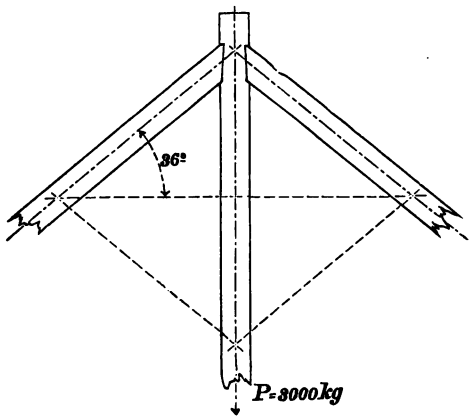
Da hier $\measuredangle ABC = \measuredangle FBE = 45^0$ ist, so wird BDEF ein Quadrat, mithin $BF = EF$, folglich:

$$2050^2 = \overline{BF^2} + \overline{EF^2} \text{ oder } 2050^2 = 2\,\overline{BF^2}.$$

$$\overline{BF^2} = \frac{2050^2}{2} = \frac{4202500}{2} = 2101250.$$

$$\overline{BF} = P_1 = P_2 = \sqrt{2101250} = 1449{,}5 \text{ kg}.$$

Fig. 8.

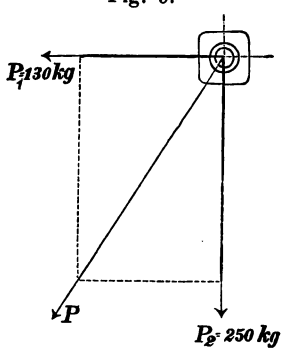


8) An der Hängesäule eines einfachen Sprengwerkes (Fig. 8) wirkt vertikal ein Zug von 3000 kg; die Streben sind unter einem Winkel von 36° gegen die Horizontale geneigt. Welchen Druck erhält jede der Streben?

Durch Konstruktion erhält man den Druck in jeder Strebe

= 2551 kg.

Fig. 9.



9) Auf einen Zapfen (Fig. 9) wird in horizontaler Richtung ein Zug $P_1 = 130$ kg und in vertikaler Richtung ein Zug $P_2 = 250$ kg ausgeübt; welchen Zug P hat der Zapfen überhaupt auszuhalten?

Nach Formel 30) erhält man:

$P^2 = P_1^2 + P_2^2$; $P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$.

$P = \sqrt{130^2 + 250^2} = \sqrt{79400} = 281{,}7$ kg.

Übungsbeispiele:

1) An drei verschiedenen Punkten einer geraden Linie A B (Fig 1) wirken die Kräfte $P = 45$ kg, $P_1 = 52$ kg, $P_2 = 63$ kg nach gleicher Richtung; wie grofs ist ihre Mittelkraft?

Lösung: $R = 160$ kg.

2) In einer geraden Linie wirken nach der einen Seite die Kräfte $P = 35$ kg, $P_1 = 42$ kg, $P_2 = 60$ kg, nach der entgegengesetzten Seite die Kräfte $Q = 50$ kg und $Q_1 = 25$ kg (Fig. 2); wie grofs ist die bewegende Kraft und nach welcher Richtung bewegt sich der Körper?

Lösung: $R = 62$ kg; die Bewegung erfolgt in der Richtung der Kräfte P, P_1, P_2.

3) Unter einem rechten Winkel wirken die Kräfte $P_1 = 30$ kg und $P_2 = 50$ kg an einem Punkte A (Fig. 5) eines Körpers; wie grofs ist die Mittelkraft?

Lösung: $R = 58{,}3$ kg.

4) Eine auf einen Punkt A wirkende Kraft R (Fig. 5) von 120 kg

soll in zwei aufeinander rechtwinkelig stehende Kräfte zerlegt werden, von denen die eine $P_1 = 75$ kg sein mag; wie grofs ist P_2?

Lösung: $P_2 = 93{,}67$ kg.

5) Wie grofs ist in vorstehendem Beispiel der Winkel β, welchen die Kraft $P_1 = 75$ kg mit der Kraft $R = 120$ kg bildet?

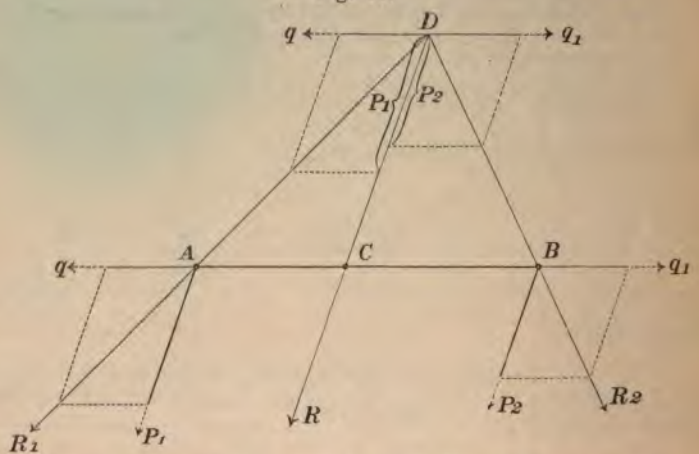
Lösung: $\beta = 51^0\ 19'$.

Sechstes Kapitel.

Kräfte, welche in paralleler Richtung auf einen Körper wirken.

Wirken 2 Kräfte, P_1 und P_2, derartig an den Punkten A und B eines Körpers (Fig 10), dafs ihre Richtungslinien Parallele bilden, so kann man ihre Mittelkraft auf folgende Weise finden:

Fig. 10.



Denkt man sich in den Punkten A und B eines Körpers, in der Richtung der Verbindungslinie dieser Punkte, zwei gleich grofse Kräfte q und q_1, in entgegengesetzter Richtung angebracht, so werden dieselben den Zustand des Körpers in nichts ändern, da diese Kräfte sich gegenseitig aufheben. Nun konstruiere man mit Hilfe des Parallelogramms aus q und P_1 die Resultante R_1, ebenso aus q_1 und P_2 die Resultante R_2 und verlängere die Richtungslinien dieser Mittelkräfte, bis sie sich in dem Punkte D schneiden. Zerlegt man in D umgekehrt wieder diese beiden Mittleren in Seitenkräfte, welche gleich und parallel denjenigen sind, aus welchen sie zusammengesetzt

wurden, so kommen die Komponenten q und q_1, die parallel zur Verbindungslinie der Angriffspunkte A und B gerichtet sind, nicht weiter in Betracht, da sie sich gegenseitig aufheben. Die beiden anderen Seitenkräfte P_1 und P_2 fallen in eine gerade Linie zusammen und ergeben die Gröfse der gesuchten Mittelkraft

$$R = P_1 + P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 34)$$

Die Lage des Angriffspunktes C dieser Resultante findet man aus der Ähnlichkeit der hierbei in Betracht kommenden Dreiecke.

Es ist $\triangle A P_1 R_1 \sim \triangle D C A$,

folglich: $q : P_1 = \overline{AC} : \overline{DC}$.

Ebenso verhält sich $q_1 : P_2 = \overline{BC} : \overline{DC}$.

Dividiert man die zweite Gleichung durch die erste, so folgt:

$$\frac{q_1}{P_2} : \frac{q}{P_1} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DC}} : \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} \text{ oder}$$

$$\frac{q_1 \cdot P_1}{q \cdot P_2} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DC}}{\overline{DC} \cdot \overline{AC}}$$ *)

und da $q = q_1$ und $\overline{DC} = \overline{DC}$ ist, so erhält man die Proportion

$$P_1 : P_2 = \overline{BC} : \overline{AC} \text{ oder}$$

$$P_1 \cdot \overline{AC} = P_2 \cdot \overline{BC} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 35)$$

Es ist also die Mittelkraft gleich der Summe der Seitenkräfte; ihre Richtungslinie ist parallel mit diesen und nach derselben Seite gerichtet. Ihr Angriffspunkt teilt die Verbindungslinie von A und B in zwei Teile und zwar derartig, dafs die eine Seitenkraft multipliziert mit ihrem Abstande bis zum Angriffspunkte der Mittelkraft, gleich ist der anderen Seitenkraft multipliziert mit ihrem Abstande bis zum Angriffspunkte der Mittelkraft.

Wirkt in dem Angriffspunkte C der Resultante in entgegengesetzter Richtung eine Kraft, welche gleich dieser Resultante ist, so wird diese Kraft den Kräften P_1 und P_2 das Gleichgewicht halten; oder denkt man sich statt der entgegengesetzt wirkenden Kraft in C einen Stützpunkt angebracht, so wird ebenfalls Gleichgewicht stattfinden. Es sind daher die beiden Kräfte P_1 und P_2 im Gleichgewicht, wenn

$P_1 \cdot \overline{AC} = P_2 \cdot \overline{BC}$ ist. (Vergl. Formel 35.)

Diese Gleichung läfst sich aber als Proportion folgendermafsen schreiben:

$$P_1 : P_2 = \overline{BC} : \overline{AC}$$

und folgt demnach aus den Regeln über Umformung der Proportionen:

---

*) Vergl. Seite 27 unter 31, d).

$P_1 + P_2 : P_1 = BC + AC : BC$ (Vergl. Kap. VII unter 39; I. T.),
d. h. $R : P_1 = AB : BC$. Folglich:

$$P_1 = \frac{BC}{AB} . R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 36)$$

$$\text{und } BC = \frac{AB}{R} . P_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 37)$$

Ferner läfst sich noch folgende Proportion bilden:
$P_2 : P_1 + P_2 = AC : BC + AC$ woraus folgt:
$P_2 : R = AC : AB$

$$\text{und damit } P_2 = \frac{AC}{AB} . R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 38)$$

$$AC = \frac{AB}{R} . P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 39)$$

Beispiele:

1) An den Punkten A und B eines Körpers, welche 1,6 m von einander entfernt sind, wirken in paralleler Richtung die Kräfte $P_1 = 32$ kg und $P_2 = 54$ kg. Es ist die Gröfse der Mittelkraft und die Lage des Angriffspunktes derselben zu bestimmen.

Aus Formel 34) erhält man:

$$R = P_1 + P_2 = 32 + 54 = 86 \text{ kg.}$$

Die Lage des Angriffspunktes C bestimmt sich aus Formel 37):

$$BC = \frac{AB}{R} . P_1 = \frac{1{,}6 . 32}{86} = 595 \text{ mm,}$$

und aus Formel 39):

$$AC = \frac{AB}{R} . P_2 = \frac{1{,}6 . 54}{86} = 1005 \text{ mm.}$$

2) Zwei parallele Kräfte $P_1 = 36$ kg und $P_2 = 68$ kg wirken in gleicher Richtung an den Punkten A und B eines Körpers, welche 2,4 m von einander entfernt sind. Man soll die Mittelkraft und die Lage des Angriffspunktes derselben bestimmen.

Als Mittelkraft erhält man aus Formel 34):

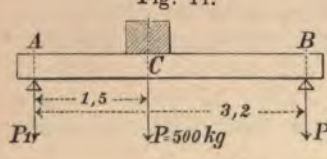
$$R = P_1 + P_2 = 36 + 68 = 104 \text{ kg.}$$

Setzt man die Entfernung $AC = x$, so wird $BC = AB - x$, mithin nach Formel 35):

$$P_1 . x = P_2 . (AB - x) \text{ oder}$$
$$36\,x = 68 . (2{,}4 - x).$$
$$36\,x = 68 . 2{,}4 - 68\,x.$$
$$36\,x + 68\,x = 68 . 2{,}4.$$
$$104\,x = 163{,}2.$$
$$x = \frac{163{,}2}{104} = 1{,}57 \text{ m, folglich:}$$

$AC = 1{,}57$ m und $BC = AB - x = 2{,}4 - 1{,}57 = 0{,}83$ m.

Fig. 11.



3) Ein Balken liegt in den Punkten A und B frei auf und wird in einem Punkte C, der 1,5 m von A entfernt ist, mit 500 kg belastet. Welchen Druck haben die Auflagepunkte A und B auszuhalten, wenn die Entfernung $AB = 3{,}2$ m ist? (Fig. 11.)

Aus Formel 36) erhält man:

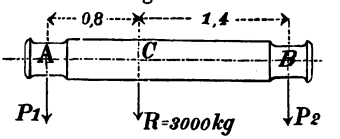
$$P_1 = \frac{BC}{AB} . R = \frac{(3{,}2 - 1{,}5)}{3{,}2} . 500 = 265{,}625 \text{ kg,}$$

und aus Formel 38):

$$P_2 = \frac{AC}{AB} \cdot R = \frac{1{,}5 \cdot 500}{3{,}2} = 234{,}375 \text{ kg.}$$

4) An einer Achse, deren eine Zapfenmitte um 0,8 m, und deren andere um 1,4 m von der Belastungsstelle entfernt ist, wirkt eine Last von 3000 kg. Wie grofs ist der Druck in den Zapfenmitten? (Fig. 12.)

Fig. 12.



Aus Formel 36) erhält man:

$$P_1 = \frac{BC}{AB} \cdot R = \frac{1{,}4 \cdot 3000}{2{,}2} = 1909 \text{ kg,}$$

und aus Formel 38):

$$P_2 = \frac{AC}{AB} \cdot R = \frac{0{,}8 \cdot 3000}{2{,}2} = 1091 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

1) Zwei Kräfte $P_1 = 20$ kg und $P_2 = 35$ kg (Fig. 10) wirken in paralleler Richtung an zwei fest mit einander verbundenen Punkten, welche 6 m von einander entfernt sind, nach ein und derselben Richtung. Es soll die Mittelkraft und deren Angriffspunkt bestimmt werden.

Lösung: $R = 55$ kg.

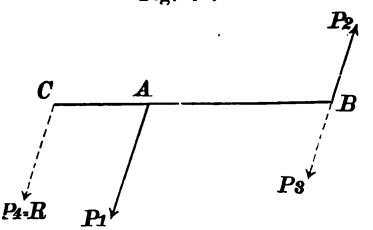
$BC = 2{,}18$ m; $AC = 3{,}82$ m.

2) Wie grofs ist die Entfernung AB zweier parallel und in gleicher Richtung wirkenden Kräfte von $P_1 = 24$ kg und $P_2 = 60$ kg, welche an zwei fest mit einander verbundenen Punkten wirken, wenn die Mittelkraft 3 m vom Angriffspunkte der Kraft $P_1 = 24$ kg angreift?

Lösung: $AB = 1{,}2$ m.

Wirken die beiden Kräfte P_1 und P_2 in paralleler Richtung, aber nach entgegengesetzten Seiten an einem Körper, so findet man die Gröfse und Lage der Mittelkraft, indem man zunächst die gröfsere der beiden Kräfte in zwei parallele Seitenkräfte zerlegt, von denen die eine gleich grofs, aber entgegengesetzt der kleineren der gegebenen Kräfte gerichtet ist. Sind P_1 und P_2 (Fig. 13) die gegebenen Kräfte, und ist $P_1 > P_2$, so zerlegt man P_1 in die beiden Seitenkräfte P_3 und P_4, so dafs $P_3 = P_2$, mithin $P_4 = P_1 - P_2$ wird.

Fig. 13.



Durch diese Zerlegung kommt P_1 in Fortfall und da $P_2 = P_3$ ist, sich also gegenseitig aufheben, so fallen auch diese fort und man erhält P_4 als Resultante der gegebenen Kräfte P_1 und P_2. Es ist daher die Gröfse dieser Mittelkraft

$$R = P_1 - P_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 40)$$

Für die Lage des Angriffspunktes erhält man nach Formel 35):

$$R \cdot AC = P_2 \cdot AB \text{ oder}$$

$$AC = \frac{P_2 \cdot AB}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 41)$$

Die Richtung von R ist dieselbe, wie die der gegebenen Kräfte und ihr Richtungssinn ist derselbe, wie derjenige der gröfseren Kraft.

Man kann sagen:

Die Mittelkraft zweier paralleler aber entgegengesetzt gerichteter Kräfte ist gleich der Differenz derselben; sie liegt aufserhalb der Kräfte nach der Seite der gröfseren hin und hat gleiche Richtung und gleichen Richtungssinn wie letztere.

Sind die beiden Kräfte P_1 und P_2 einander gleich, so lassen sich dieselben nicht mehr zusammensetzen; d. h. es giebt keine einzelne Kraft, welche befähigt wäre, die beiden Kräfte zu ersetzen.

Zwei solche Kräfte nennt man ein Kräftepaar.

Ein Kräftepaar kann keine fortschreitende Bewegung, sondern nur eine drehende Bewegung erzeugen, es ist als die Ursache der Drehbewegung anzusehen.

Dasselbe kann niemals durch eine einzelne Kraft, sondern nur wieder durch ein Kräftepaar ersetzt oder aufgehoben werden.

Beispiel.

Zwei Kräfte $P_1 = 60$ kg und $P_2 = 36$ kg wirken in den Punkten A und B, welche 1,6 m von einander entfernt sind, in paralleler aber entgegengesetzter Richtung. Welche Gröfse und welche Entfernung AC hat die Mittelkraft?

Aus Formel 40) erhält man:

$$R = P_1 - P_2 = 60 - 36 = 24 \text{ kg},$$

und aus Formel 41):

$$AC = \frac{P_2 \cdot AB}{R} = \frac{36 \cdot 1{,}6}{24} = 2{,}4 \text{ m}.$$

Siebentes Kapitel.

Vom statischen Moment.

Im vorigen Kapitel wurde festgestellt, dafs zwei Kräfte P_1 und P_2, welche in paralleler Richtung an einem Körper wirken, im Gleichgewicht sind, wenn

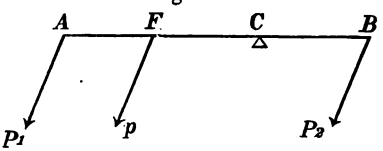
$$P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC \text{ ist.}$$

Das Bestreben der Kräfte P_1 und P_2 eine Drehung um C hervorzubringen, ist also nicht allein abhängig von der Gröfse der Kräfte selbst, sondern auch von dem Abstande ihrer Angriffspunkte vom Dreh- oder Stützpunkt.

Die Gröfse dieses Drehbestrebens wird durch das Produkt $P_1 \cdot AC$ resp. $P_2 \cdot BC$ ausgedrückt.

Würde in F (Fig. 14) noch eine Kraft p wirksam sein, so ist das Bestreben dieser Kraft eine Drehung um C hervorzurufen = p . FC; das Drehbestreben von P_1 ist aber = P_1 . AC, mithin die Wirkung beider Kräfte zusammengenommen = P_1 . AC + p . FC, daher für den Gleichgewichtszustand:

Fig. 14.

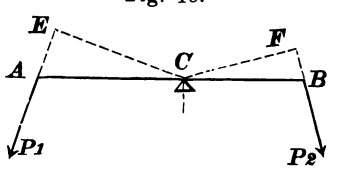


$$P_1 \cdot AC + p \cdot FC = P_2 \cdot BC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 42)$$

Wirken die Kräfte P_1 und P_2 nicht in paralleler Richtung, so kann für den Gleichgewichtszustand auch nicht mehr $P_1 \cdot AC = P_2 \cdot BC$ sein, denn die Wirkung der Kräfte P_1 und P_2 (eine Drehung um C hervorzubringen) wird eine andere, je nachdem ihre Richtungslinien verschieden sind.

Denkt man sich die Richtungslinien der nicht parallelen Kräfte P_1 und P_2 über ihre Angriffspunkte A und B hinaus verlängert (Fig. 15) und vom Drehpunkt C die Normalen EC und FC auf diese Richtungslinien gefällt, so gelten jetzt EC und FC als die eigentlichen Entfernungen der Richtungslinien vom Drehpunkt und ist nun für den Gleichgewichtszustand:

Fig. 15.



$$P_1 \cdot EC = P_2 \cdot FC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 43)$$

Die Gröfse des Bestrebens einer Kraft eine Drehung um den Stütz- oder Drehpunkt hervorzubringen, ist also bei nicht parallelen Kräften gleich dem Produkt aus der Gröfse der Kraft und ihrem senkrechten Abstande vom Drehpunkt.

Man nennt dieses Produkt das Drehungsmoment oder das statische Moment der Kraft und sagt deshalb auch: Die Kräfte P_1 und P_2 sind im Gleichgewicht, wenn ihre statischen Momente gleich sind.

Sind mehrere Kräfte auf beiden Seiten des Dreh- oder Stützpunktes vorhanden, so wird Gleichgewicht stattfinden, wenn die Summe der statischen Momente aller Kräfte, welche rechts herum zu drehen suchen, gleich ist der Summe aller Momente derjenigen Kräfte, welche bestrebt sind eine Drehung nach links hervorzubringen.

Beispiele:

1) An einem Körper, welcher um einen Punkt drehbar ist, wirkt eine Kraft von 50 kg in einem Abstande = 0,6 m vom Drehpunkt;

in welchem Abstande mufs eine Kraft von 30 kg in derselben Richtung wirkend angebracht werden, um jener das Gleichgewicht zu halten?

Aus Formel 35) erhält man:

$$P_1 . AC = P_2 . BC, \text{ d. h. } 50 . 0{,}6 = 30 . BC, \text{ folglich:}$$

$$BC = \frac{50 . 0{,}6}{30} = 1{,}00 \text{ m.}$$

2) An den Punkten A, F und B (Fig. 14) eines Körpers wirken die Kräfte $P_1 = 20$ kg, $p = 15$ kg und $P_2 = 60$ kg; die Entfernung AF beträgt 0,5 m und $BF = 0{,}8$ m. Wo mufs der Stützpunkt C angebracht werden, wenn keine Drehung erfolgen soll?

Nach Formel 42) ist:

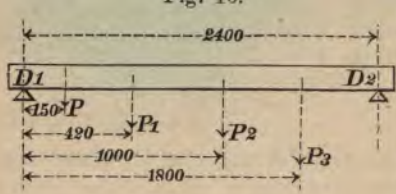
$$P_1 . AC + p . FC = P_2 . BC.$$

Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man:

$$20\ (0{,}5 + FC) + 15 . FC = 60\ (0{,}8 - FC).$$
$$10 + 20 . FC + 15 . FC = 48 - 60 . FC.$$
$$20 . FC + 15 . FC + 60 . FC = 48 - 10.$$
$$95 . FC = 38.$$
$$FC = \frac{38}{95} = 0{,}4 \text{ m.}$$

3) Ein Balken, welcher in den Punkten D_1 und D_2 unterstützt ist, wird durch die Kräfte $P = 30$ kg, $P_1 = 46$ kg, $P_2 = 60$ kg und $P_3 = 20$ kg beansprucht. Die Entfernung der Stützpunkte betrage 2,4 m; die Entfernung der Angriffspunkte der Kräfte vom linken Stützpunkte sei für $P = 150$ mm, $P_1 = 420$ mm, $P_2 = 1000$ mm, $P_3 = 1800$ mm. (Fig. 16.)

Fig. 16.



Wie grofs sind die Drucke in den Auflagepunkten D_1 und D_2, die Mittelkraft und die Entfernung der Lage ihres Angriffspunktes?

Denkt man sich statt des Unterstützungspunktes in D_2 eine aufwärts wirkende Kraft, so mufs diese den Kräften P, P_1, P_2, P_3 das Gleichgewicht halten. Bezeichnet man diese Kraft mit x, und nimmt man D_1 als Drehpunkt an, so ergiebt sich als Druck in D_2:

$$x . 2400 = 30 . 150 + 46 . 420 + 60 . 1000 + 20 . 1800.$$
$$x . 2400 = 119820 = 120000 \text{ abgerundet.}$$
$$x = \frac{120000}{2400} = 50 \text{ kg.}$$

Die Mittelkraft beträgt:

$$R = 30 + 46 + 60 + 20 = 156 \text{ kg,}$$

mithin der Druck im Stützpunkt D_1:

$$D_1 = R - x = 156 - 50 = 106 \text{ kg.}$$

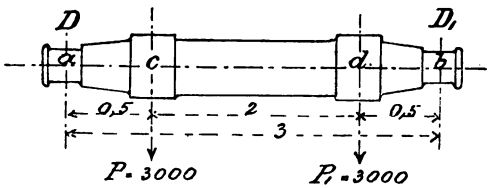
Bezeichnet man den Abstand des Angriffspunktes der Mittelkraft von D_1 mit y, so mufs diese Mittelkraft dieselbe Wirkung auf D_2 ausüben, wie die einzelnen Kräfte zusammengenommen, es mufs daher:

$$R . y = 2400 . x = 2400 . 50 \text{ sein, folglich:}$$
$$y = \frac{2400 . 50}{156} = 769{,}2 \text{ mm.}$$

Übungsbeispiele:*)

1) Eine Achse ist in den Punkten c und d (Fig. 17), welche 2 m von einander entfernt sind, mit je 3000 kg belastet; wie grofs sind die Drucke D und D_1 in den Zapfenmitten a und b, wenn die Entfernung derselben 3 m beträgt?

Fig. 17.



Wird b als Drehpunkt angenommen, so erhält man für das Gleichgewicht:

$3 \cdot x = 3000 \cdot 0{,}5 + 3000 \cdot 2{,}5$ und damit

$x = 3000$ kg als Druck in D.

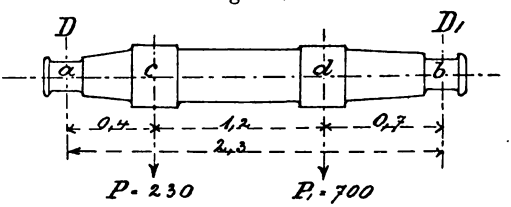
Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$3 \cdot y = 3000 \cdot 0{,}5 + 3000 \cdot 2{,}5$ und damit

$y = 3000$ kg als Druck in D_1.

2) Eine schmiedeiserne Achse (Fig. 18) ei in den Punkten a nd b gelagert; im Punkte c, welcher 0,4 m von a entfernt ist, mit P = 230 kg und im Punkte d, welcher 1,6 m von a entfernt ist, mit $P_1 = 700$ kg belastet. Wie grofs sind die Auflagerdrucke D und D_1 in den Zapfenmitten?

Fig. 18.



Nimmt man b als Drehpunkt an, so ist für das Gleichgewicht:

$x \cdot 2{,}3 = 700 \cdot 0{,}7 + 230 \cdot 1{,}9$ und damit

$x = 403$ kg als Druck in D.

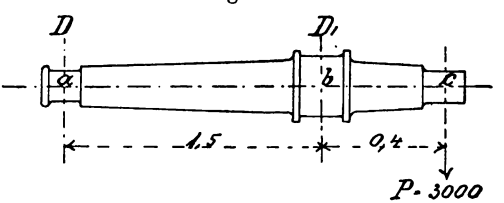
Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$y \cdot 2{,}3 = 230 \cdot 0{,}4 + 700 \cdot 1{,}6$ und damit

$y = 527$ kg als Druck in D_1.

3) Eine Achse ist F den Punkten a und b, welche 1,5 m von einander entfernt sind Fig. 19), gelagert. Im Punkte c ist die Achse mit P = 3000 kg belastet; wie grofs sind die Drucke in den Lagermitten D und D_1?

Fig. 19.



Wird b als Drehpunkt angenommen, so erhält man für das Gleichgewicht:

$x \cdot 1{,}5 = 3000 \cdot 0{,}4$ und damit

$x = 800$ kg als Druck in D.

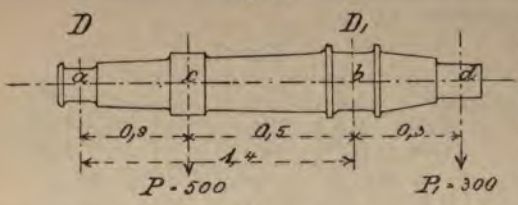
*) Bei diesen Beispielen ist das Eigengewicht der Achsen vernachlässigt.

Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$y \cdot 1{,}5 = 3000 \cdot 1{,}9$ und damit

$y = 3800$ kg als Druck in D_1.

Fig. 20.



4) Eine schmiedeeiserne Achse ist in den Punkten a und b (Fig. 20), welche 1,4 m von einander entfernt sind, gelagert. Im Punkte c wirkt eine Kraft P = 500 kg und im Punkte d eine solche von P_1 = 300 kg; wie grofs sind die Auflagerdrucke in D und D_1?

Wird b als Drehpunkt angenommen, so ist für das Gleichgewicht:

$x \cdot 1{,}4 + 0{,}3 \cdot 300 = 0{,}5 \cdot 500$, d. h.

$x \cdot 1{,}4 = 0{,}5 \cdot 500 - 0{,}3 \cdot 300$ und damit

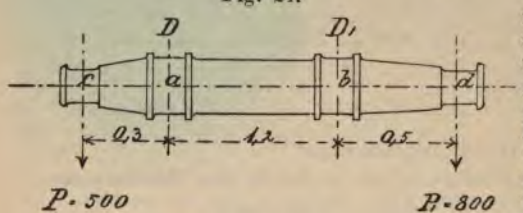
$x = 114{,}3$ kg als Druck in D.

Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$y \cdot 1{,}4 = 0{,}9 \cdot 500 + 1{,}7 \cdot 300$ und damit

$y = 685{,}7$ kg als Druck in D_1.

Fig. 21.



5) Eine Achse ist in den 1,2 m von einander entfernten Punkten a und b (Fig. 21) gelagert; 0,3 m von a entfernt wirkt eine Kraft P = 500 kg und 0,5 m von b entfernt eine Kraft P_1 = 800 kg; wie grofs sind die Drucke in D und D_1?

Wird b als Drehpunkt angenommen, so ist für das Gleichgewicht:

$500 \cdot 1{,}5 = 800 \cdot 0{,}5 + x \cdot 1{,}2$, d. h.

$x \cdot 1{,}2 = 500 \cdot 1{,}5 - 800 \cdot 0{,}5$, mithin

$x = 291{,}6$ kg als Druck in D.

Wird a als Drehpunkt angenommen, so wird:

$800 \cdot 1{,}7 = 500 \cdot 0{,}3 + y \cdot 1{,}2$, d. h.

$y \cdot 1{,}2 = 800 \cdot 1{,}7 - 500 \cdot 0{,}3$, mithin

$y = 1008{,}4$ kg als Druck in D_1.

Achtes Kapitel.

Vom Hebel.

Der Hebel ist ein beliebig geformter starrer Körper, an welchem zwei oder mehrere Kräfte derartig wirken, dafs sie Drehungen in entgegengesetzten Richtungen herbeizuführen suchen.

Die senkrechten Abstände der Richtungslinien der Kräfte vom Drehpunkte nennt man Hebelarme.

Je nachdem nun diese Hebelarme eine gerade Linie oder einen Winkel bilden, unterscheidet man geradlinige Hebel und Winkelhebel.

Sieht man zunächst sowohl von dem Einfluſs, welchen das Gewicht des Hebels ausübt, als auch von der Reibung im Drehpunkte ab und betrachtet man nur den Zustand des Gleichgewichts, d. h. die Bedingungen, unter denen sich der Hebel trotz der Einwirkung der an ihm thätigen Kräfte in Ruhe befindet, so erhält man für den geradlinigen Hebel bei parallel und senkrecht zur Hebelachse gerichteten Kräften (Fig. 22 u. 23) als Bedingung für den Gleichgewichtszustand:

Fig. 22.

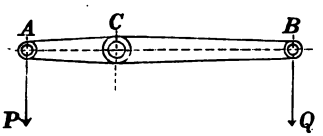
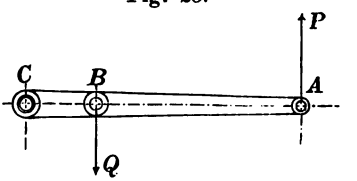


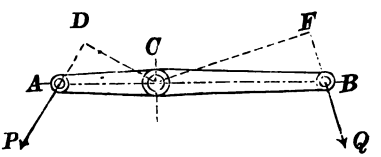
Fig. 23.



$$P \,.\, AC = Q \,.\, BC \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 44)$$

Man nennt den Hebel in Fig. 22) einen zweiarmigen und den Hebel in Fig. 23) einen einarmigen Hebel. Wirken die Kräfte nicht in paralleler Richtung (Fig. 24), so findet Gleichgewicht statt, wenn

Fig. 24.



$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC \text{ ist} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 45)$$

Bei dem Winkelhebel und parallel gerichteten Kräften (Fig. 25) wird Gleichgewicht stattfinden, wenn

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC \text{ ist} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

Fig. 25.

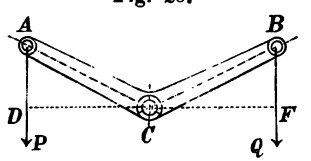
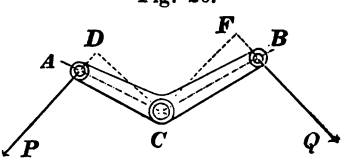


Fig. 26.



Sind die Richtungslinien der Kräfte nicht parallel (Fig. 26), so muſs auch hier für das Gleichgewicht

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC \text{ sein} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

Es ist also bei dem Hebel gleichgültig, welche Richtung die Kräfte haben; man hat nur nötig, Normalen vom Dreh-

punkte auf die Richtungslinien der Kräfte zu fällen, die jetzt zu bildenden Momente gleich zu setzen und aus dieser Gleichung die gesuchte Gröfse zu ermitteln.

Sind mehrere Kräfte am Hebel thätig, so findet ebenfalls Gleichgewicht statt, wenn man die Summe der statischen Momente auf einer Seite des Hebels gleichsetzt der Summe der statischen Momente auf der anderen Seite desselben, und aus dieser Gleichung die unbekannte Gröfse bestimmt.

Soll noch das eigene Gewicht des Hebels berücksichtigt werden, so ist dasselbe als eine Kraft zu betrachten, deren Angriffspunkt im Schwerpunkte des Hebels liegt und senkrecht nach unten wirkt.

Beispiele:

1) An einem zweiarmigen Hebel wirkt an dem einen Hebelarm $AC = 0{,}6$ m eine Kraft $P = 25$ kg; welche Last Q kann an dem Hebelarm $BC = 0{,}4$ m durch die Kraft P im Gleichgewicht gehalten werden? (Fig. 22.)

Für den Gleichgewichtszustand erhält man:

$$P \cdot AC = Q \cdot BC, \text{ oder:}$$
$$25 \cdot 0{,}6 = Q \cdot 0{,}4.$$
$$Q = \frac{25 \cdot 0{,}6}{0{,}4} = 37{,}5 \text{ kg}.$$

2) An einem zweiarmigen Hebel (Fig. 24) wirkt im Abstande $AC = 0{,}7$ m eine Kraft $P = 30$ kg, deren Richtungslinie mit AC einen Winkel von 30^0 bildet; welche Last Q kann im Abstande $BC = 0{,}3$ m durch die Kraft P im Gleichgewicht gehalten werden, wenn die Richtungslinie der Last Q ebenfalls einen Winkel von 30^0 mit BC bildet?

Für den Gleichgewichtszustand ist nach Formel 45):

$$P \cdot DC = Q \cdot FC.$$

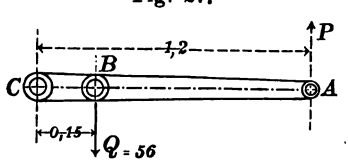
Unter vorstehender Annahme wird:

$DC = 0{,}606$ m und $FC = 0{,}26$ m, mithin:

$$30 \cdot 0{,}606 = Q \cdot 0{,}26.$$
$$Q = \frac{30 \cdot 0{,}606}{0{,}26} = 70 \text{ kg}.$$

3) An einem einarmigen Hebel von 1,2 m Länge wirkt ein Zug von 56 kg in einer Entfernung $= 0{,}15$ m vom Drehpunkt. Wie grofs ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes nötige Kraft P am Ende des Hebels? (Fig. 27.)

Fig. 27.



Für das Gleichgewicht erhält man:

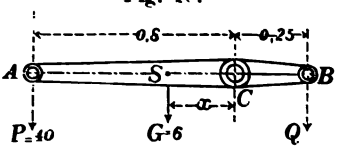
$$P \cdot AC = Q \cdot BC.$$
$$P \cdot 1{,}2 = 56 \cdot 0{,}15.$$
$$P = \frac{56 \cdot 0{,}15}{1{,}2} = 7 \text{ kg}.$$

4) An einem zweiarmigen Hebel wirkt an dem einen Hebelarm $AC = 0{,}8$ m eine Kraft $P = 40$ kg; welche Last Q kann an dem Hebel-

arm BC = 0,25 m im Gleichgewicht gehalten werden, wenn der überall gleich starke Hebel 6 kg schwer ist? (Fig. 28.)

Da der Hebel überall gleich stark ist, so liegt sein Schwerpunkt S in der Mitte. Bezeichnet man die Entfernung desselben vom Drehpunkt C mit x und das Gewicht des Hebels mit G, so ist für das Gleichgewicht: P . AC + G . x = Q . BC, oder:

Fig. 28.



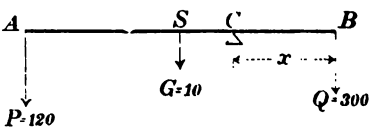
$$40 : 0{,}8 + 6\left(\frac{0{,}8 + 0{,}25}{2} - 0{,}25\right) = Q \,.\, 0{,}25.$$

$$32 + 1{,}65 = Q \,.\, 0{,}25.$$

$$Q = \frac{32 + 1{,}65}{0{,}25} = 134{,}6 \text{ kg}.$$

5) An einer überall gleich starken, 10 kg schweren Stange von 2,6 m Länge, wirkt an dem einen Ende A eine Kraft von 120 kg und am anderen Ende B eine Kraft von 300 kg; wo mufs der Stützpunkt C angebracht werden, damit die beiden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, und welchen Druck hat derselbe zu erleiden? (Fig. 29.)

Fig. 29.



Da die Stange überall gleich stark ist, so liegt ihr Schwerpunkt S in der Mitte. Bezeichnet man den Abstand des Stützpunktes C von B mit x, so ist AC = 2,6 — x, und der Abstand des Schwerpunktes S der Stange von C = 1,3 — x; mithin erhält man für den Gleichgewichtszustand:

$$P \,.\, AC + G \,.\, SC = Q \,.\, BC.$$

$$120\ (2{,}6 - x) + 10\ (1{,}3 - x) = 300\ x.$$

$$312 - 120\,x + 13 - 10\,x = 300\,x.$$

$$325 = 300\,x + 120\,x + 10\,x.$$

$$325 = 430\,x.$$

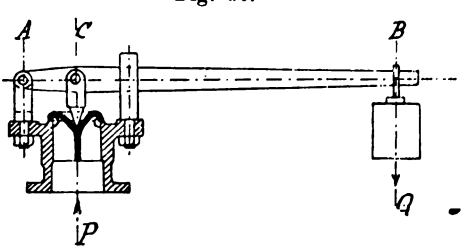
$$x = \frac{325}{430} = 0{,}756 \text{ m}.$$

Der Stützpunkt*) liegt mithin 756 mm von B entfernt. Der Druck im Stützpunkt C ist:

$$P + G + Q = 120 + 10 + 300 = 430 \text{ kg}.$$

6) Gegen die untere Fläche eines Sicherheitsventiles (Fig. 30) wirkt ein Dampfdruck von 130 kg; dasselbe wird durch einen einarmigen Hebel, dessen Arme 0,12 und 0,8 m lang sind, belastet. Welches Gewicht muss am längeren Hebelarm angehängt werden, um dem Dampfdruck das Gleichgewicht zu halten?

Fig. 30.



*) Vergl. Seite 75.)

Entsprechend Formel 44) erhält man:

$$P \,.\, AC = Q \,.\, AB.$$
$$130 \,.\, 0{,}12 = Q \,.\, 0{,}8.$$
$$Q = \frac{130 \,.\, 0{,}12}{0{,}8} = 19{,}5 \text{ kg}.$$

7) In vorstehender Aufgabe soll das Gewicht des Ventiles und Hebels mit in Rechnung gezogen werden, und zwar betrage das Gewicht des Hebels 6 kg und das Gewicht des Ventiles 2,5 kg.

Die Hebelstange sei prismatisch gearbeitet; ihr Gewicht kann daher als in der Mitte derselben angreifend gedacht werden.

Es wirken mithin abwärts:

Das Moment des angehängten Gewichtes $= Q \,.\, 0{,}8$.
„ „ „ Hebelgewichtes . . . $= 6 \,.\, 0{,}4$.
„ „ „ Ventilgewichtes . . . $= 2{,}5 \,.\, 0{,}12$.

Aufwärts wirkt:

Das Moment des Dampfdruckes . . . . $= 130 \,.\, 0{,}12$.

Es ist daher für den Gleichgewichtszustand:

$$Q \,.\, 0{,}8 + 6 \,.\, 0{,}4 + 2{,}5 \,.\, 0{,}12 = 130 \,.\, 0{,}12.$$
$$Q \,.\, 0{,}8 = 130 \,.\, 0{,}12 - 6 \,.\, 0{,}4 - 2{,}5 \,.\, 0{,}12.$$
$$Q = \frac{12{,}9}{0{,}8} = 16{,}125 \text{ kg}.$$

8) Für ein anderes Ventil betrage der Durchmesser desselben 65 mm; der Dampfdruck 6 kg pro qcm; der Abstand des Ventiles vom Drehpunkt 0,12 m; das Hebelgewicht 7 kg im Abstande 0,5 m vom Drehpunkt wirkend; das Ventilgewicht 2,5 kg. Welche Länge mufs der Hebel erhalten, wenn ein Gewicht von 25 kg benützt werden soll?

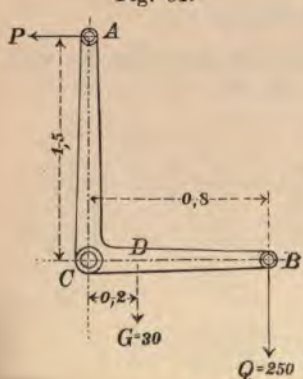
Als abwärts wirkende Momente erhält man:

Moment des angehängten Gewichtes $= 25 \,.\, x$.
„ „ Hebelgewichtes . . . $= 7 \,.\, 0{,}5$.
„ „ Ventilgewichtes . . . $= 2{,}5 \,.\, 0{,}12$.

Den Dampfdruck, welcher von unten auf das Ventil wirkt, erhält man, wenn man den Flächeninhalt des Ventiles in qcm mit der Anzahl der Atmosphären multipliziert. Demnach wird der Dampfdruck $= \frac{\pi \,.\, d^2}{4} \,.\, 6$ und das aufwärts wirkende Moment des Dampfdruckes $=$

$$\frac{\pi \,.\, d^2}{4} \,.\, 6 \,.\, 0{,}12 = \frac{3{,}14 \,.\, 6{,}5^2}{4} \,.\, 6 \,.\, 0{,}12 = 23{,}88.$$

Fig. 31.



Mithin für den Gleichgewichtszustand:

$$25x + 7 \,.\, 0{,}5 + 2{,}5 \,.\, 0{,}12 = 23{,}88.$$
$$25x = 23{,}88 - 7 \,.\, 0{,}5 - 2{,}5 \,.\, 0{,}12.$$
$$x = \frac{20{,}08}{25} = 0{,}803 \text{ m}.$$

9) An einem Winkelhebel wirkt senkrecht abwärts ziehend eine Last Q = 250 kg an einem Hebelarm BC = 0,8 m. (Fig. 31.)

Welche Kraft P ist in horizontaler Richtung an einem Hebelarm AC = 1,5 m zur Herstellung des Gleichgewichtes notwendig, wenn das Eigengewicht G des Hebels 30 kg und dessen Hebelarm CD = 0,2 m beträgt, und wie grofs ist der Zapfendruck?

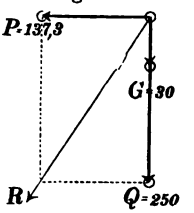
Für den Gleichgewichtszustand erhält man:

$$P \cdot AC = Q \cdot BC + G \cdot CD.$$

$$P \cdot 1{,}5 = 250 \cdot 0{,}8 + 30 \cdot 0{,}2.$$

$$P = \frac{250 \cdot 0{,}8 + 30 \cdot 0{,}2}{1{,}5} = 137{,}3 \text{ kg}.$$

Fig. 32.

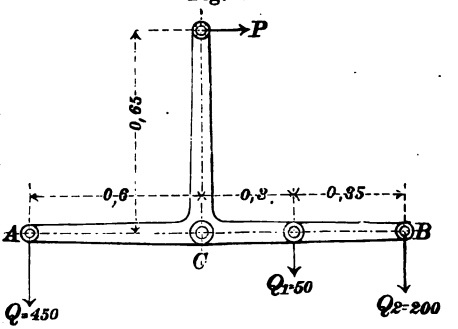


Der Zapfen (Fig. 32) wird durch die beiden senkrecht wirkenden Kräfte G = 30 kg und Q = 250 kg, sowie durch die horizontal wirkende Kraft P = 137,3 kg beansprucht. Man erhält daher als Zapfendruck die Mittlere aus diesen Kräften nach Formel 31):

$$R = \sqrt{(G+Q)^2 + P^2} = \sqrt{(30+250)^2 + 137{,}3^2}.$$

$$R = \sqrt{97251{,}3} = 312 \text{ kg}.$$

Fig. 33.



10) Am horizontalen Schenkel eines Winkelhebels wirken die Lasten Q = 450 kg, Q_1 = 50 kg, Q_2 = 200 kg; welche Kraft P mufs am vertikalen Schenkel desselben angebracht werden, um diesen Lasten das Gleichgewicht zu halten? (Fig. 33.)

Für den Gleichgewichtszustand ist:

$$P \cdot 0{,}65 = 450 \cdot 0{,}6 - 50 \cdot 0{,}3 - 200 \cdot 0{,}65.$$

$$P = \frac{125}{0{,}65} = 192{,}3 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Arbeiter wirkt mit 30 kg an dem 2,5 m langen Arme eines zweiarmigen Hebels. Welche Last kann der Arbeiter am Ende des anderen 0,5 m langen Hebelarmes im Gleichgewicht halten?

Lösung: Q = 150 kg.

2) Ein Arbeiter soll vermittelst einer Brechstange von 1,6 m Länge eine Last von 600 kg heben. Wo ist der Unterstützungspunkt anzubringen, wenn angenommen wird, dafs der Arbeiter mit einer Kraft von 40 kg wirkt?

Lösung: In einer Entfernung = 0,1 m vom Angriffspunkte der Last.

3) In der Entfernung 0,3 m vom Stützpunkte eines einarmigen Hebels ist ein Druck von 75 kg wirksam. Wie grofs ist die zur Herstellung des Gleichgewichtes nötige Kraft am Ende des Hebels, wenn dasselbe 2,5 m vom Stützpunkt entfernt ist?

Lösung: P = 9 kg.

4) An einem Winkelhebel, dessen Armlängen 0,4 m und 1,4 m betragen, hängt eine Last Q, welche mit dem 0,4 m langen Arme einen Winkel von 60° bildet. Wie grofs kann diese Last Q sein, wenn sie

durch eine rechtwinkelig gegen den 1,4 m langen Arm gerichtete Kraft P = 120 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: Durch Konstruktion ergiebt sich der Hebelarm der Last Q zu 0,346 m und hieraus: Q = 485,5 kg.

Bei der aufserordentlich mannigfaltigen Anwendung des Hebels auf allen Gebieten der Praxis ist es wünschenswert für die hauptsächlichsten Belastungsfälle den jeweiligen Druck im Drehpunkte des Hebels zu kennen. Die Gröfse dieses Druckes ist neben ihrem Einflusse auf die Reibung und die Abmessungen des Drehzapfens noch in vielfach anderer Beziehung Ausschlag gebend. In Folgendem soll für die einzelnen Belastungsfälle noch einmal die Momentengleichung aufgestellt und der Druck im Drehpunkte angegeben werden:

Für den in Fig. 22) dargestellten Fall ist

$$P \,.\, AC = Q \,.\, BC$$

und, wenn man allgemein den Druck im Stützzapfen mit R bezeichnet,

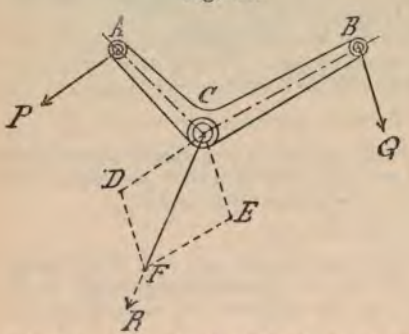
$$R = P + Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 48)$$

Dem Belastungsfall Fig. 23) entsprechend erhält man

$$P \,.\, AC = Q \,.\, BC \text{ und}$$

$$R = Q - P \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Fig. 34.



Die Ermittelung des Druckes R für die den Fig. 24 und 26) entsprechenden Fälle ist in nebenstehender Fig. 34) dargestellt. Die Momentengleichung heifst zunächst

$$P \,.\, DC = Q \,.\, FC$$

(vergl. Formel 45 u. 46).

Um den Druck R zu finden, konstruiere man, vom Drehpunkte C ausgehend, aus den beiden Kräften P u. Q das Parallelogramm*) CDFE. Die Gröfse der Mittelkraft

$$R = CF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 50)$$

giebt den Druck im Drehpunkte ohne weiteres, der Gröfse und Richtung entsprechend, an.

Stehen die Arme des Winkelhebels senkrecht zu einander, so ist für den in Fig. 31) skizzierten Fall bei der Ermittelung

---

*) Vergl. Seite 70 und 71.)

des Druckes R entsprechend Fig. 32) zu verfahren. Ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes G des Hebels wird dann

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 51)$$

und mit Berücksichtigung desselben

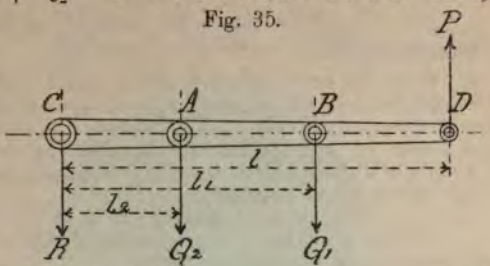
$$R = \sqrt{(G + Q)^2 + P^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 52)$$

Für Fig. 35) ergiebt sich nach dem Vorstehenden:

$$P \cdot l = Q_1 \cdot l_1 + Q_2 \cdot l_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 53)$$

$$\text{und } R = Q_1 + Q_2 - P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 54)$$

Fig. 35.

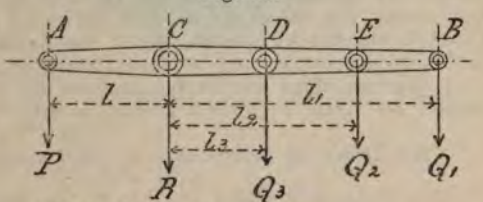


In gleicher Weise folgt für den Belastungsfall, welcher durch Fig. 36) dargestellt wird:

$$P\,l = Q_1 l_1 + Q_2 l_2 + Q_3 l_3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 55)$$

$$\text{und } R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 56)$$

Fig. 36.



Wirken die an einem Hebel thätigen Kräfte in verschiedenen Umdrehungsebenen (Fig. 37), so ändert sich deshalb die Momenten-Gleichung

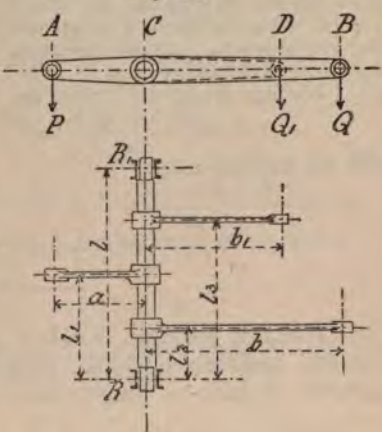
$$P\,a = Q\,b + Q_1 b_1 + \ldots .$$

nicht; nur findet hier eine besondere Verteilung des gesamten Achsendruckes

$$R_0 = P + Q + Q_1 + \ldots$$

auf die beiden Stützpunkte oder sogenannten Zapfenlager C statt.

Fig. 37.



Bezeichnet l die Länge der Hebelachse oder die Entfernung der Stützpunkte C derselben von einander, und sind l_1, l_2, l_3 . . . . die Abstände der Umdrehungsebenen der Kräfte von einem dieser Stützpunkte, so hat man für die Zapfendrucke R und R_1 folgende Werte:

des Druckes R entsprechend Fig. 32) zu verfahren. Ohne Berücksichtigung des Eigengewichtes G des Hebels wird dann

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 51)$$

und mit Berücksichtigung desselben

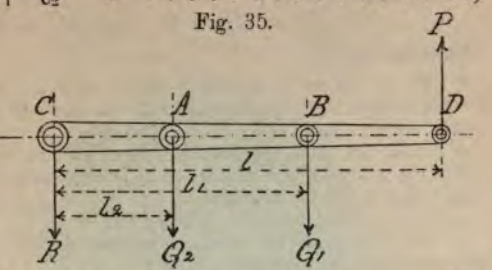
$$R = \sqrt{(G + Q)^2 + P^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 52)$$

Für Fig. 35) ergiebt sich nach dem Vorstehenden:

$$P \cdot l = Q_1 \cdot l_1 + Q_2 \cdot l_2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 53)$$

$$\text{und } R = Q_1 + Q_2 - P \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 54)$$

Fig. 35.

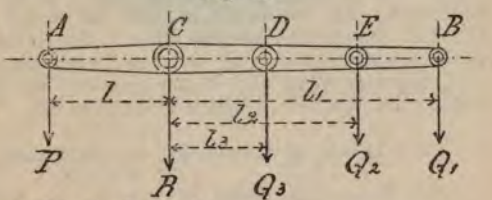


In gleicher Weise folgt für den Belastungsfall, welcher durch Fig. 36) dargestellt wird:

$$P\,l = Q_1\,l_1 + Q_2\,l_2 + Q_3\,l_3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 55)$$

$$\text{und } R = P + Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 56)$$

Fig. 36.



Wirken die an einem Hebel thätigen Kräfte in verschiedenen Umdrehungsebenen (Fig. 37), so ändert sich deshalb die Momenten-Gleichung

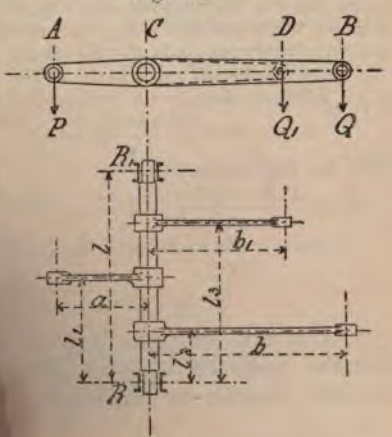
$$P\,a = Q\,b + Q_1 b_1 + \ldots .$$

nicht; nur findet hier eine besondere Verteilung des gesamten Achsendruckes

$$R_0 = P + Q + Q_1 + \ldots$$

auf die beiden Stützpunkte oder sogenannten Zapfenlager C statt.

Fig. 37.



Bezeichnet l die Länge der Hebelachse oder die Entfernung der Stützpunkte C derselben von einander, und sind l_1, l_2, l_3 . . . . die Ab-

ngs-

$$R_1 = \frac{P l_1 + Q l_2 + Q_1 l_3}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 57)$$

$$R = \frac{P(l-l_1) + Q(l-l_2) + Q_1(l-l_3)}{l} \quad \ldots\ldots 58)$$

Nach den Gesetzen über parallele Kräfte*) mufs sich R_0 aus den Drucken R und R_1 zusammensetzen, d. h. es mufs

$$R_0 = R + R_1 \text{ sein.}$$

Hieraus folgt:

$$R = R_0 - R_1 \text{ und } R_1 = R_0 - R.$$

Übungsbeispiele:

1) An einem einarmigen Hebel von 1,5 m Länge (Fig. 35) wirken die vertikalen Kräfte $Q_2 = 20$ kg und $Q_1 = 46$ kg abwärts. Welcher aufwärts wirkenden Kraft P, im Abstande 1,5 m vom Drehpunkte, können die Kräfte Q_2 und Q_1 das Gleichgewicht halten, wenn der Abstand des Angriffspunktes der Kraft Q_2 vom Drehpunkte = 0,2 m und derjenige der Kraft $Q_1 = 0{,}5$ m beträgt?

Lösung: $P = 18$ kg.

2) Wie grofs ist in vorstehender Aufgabe der Druck, welchen der Drehpunkt in C auszuhalten hat?

Lösung: $R = 48$ kg.

3) An einem zweiarmigen Hebel (Fig. 36) von 1,7 m Länge wirken im Punkte A eine Kraft $P = 60$ kg, in den Punkten D, E und B die bezüglichen Kräfte $Q_3 = 70$ kg, $Q_2 = 20$ kg und $Q_1 = 100$ kg. Die Entfernung EB sei = 0,1 m und $DE = 0{,}2$ m; wo mufs der Stützpunkt C angebracht werden, damit die Kräfte P, Q_1, Q_2, Q_3 sich das Gleichgewicht halten, und welchen Druck hat derselbe aufzunehmen?

Lösung: Wird die Entfernung des Stützpunktes C vom Angriffspunkte der Kraft P gleich x gesetzt, so ist:

$$x = 1{,}2 \text{ m.}$$

Als Druck im Stützpunkte C erhält man:

$$R = 250 \text{ kg.}$$

4) Wenn der Hebel in Fig. 37) in den Abständen $l_2 = 12$ und $l_3 = 24$ vom Zapfenlager R die an den Hebelarmen $b = 16$ und $b_1 = 10$ wirkenden Lasten $Q = 300$ kg und $Q_1 = 480$ kg trägt, wie grofs ist dann die zur Herstellung des Gleichgewichtes nötige, an dem Hebelarm $a = 60$ wirkende Kraft P, und wie grofs sind die Zapfendrucke R und R_1, vorausgesetzt, dafs die Kraft im Abstande $l_1 = 18$ von R wirkt und die ganze Achsenlänge $l = 32$ mifst?

Lösung: Es ist die Gröfse der erforderlichen Kraft:

$$P = \frac{Q \cdot b + Q_1 \cdot b_1}{a} = \frac{300 \cdot 16 + 480 \cdot 10}{60} = 160 \text{ kg}$$

und die Zapfendrucke:

$$R_1 = \frac{P \cdot l_1 + Q \cdot l_2 + Q_1 \cdot l_3}{l} = \frac{160 \cdot 18 + 300 \cdot 12 + 480 \cdot 24}{32} = 562{,}5 \text{ kg;}$$

$$R = R_0 - R_1 = 300 + 480 + 160 - 562{,}5 = 377{,}5 \text{ kg.}$$

Um mit geringen Kräften gröfsere Lasten zu bewältigen, werden mehrere einfache Hebel zu Hebelwerken zusammengesetzt, welche so angeordnet sind, dafs immer der kürzere

*) Vergl. Seite 75.)

Hebelarm des einen Hebels mit dem längeren Hebelarm des folgenden Hebels verbunden wird.

Um die Wirkung dieser Hebelwerke kennen zu lernen, bestimme man den Gleichgewichtszustand für jeden einzelnen Hebel und multipliziere die dadurch erhaltenen Gleichungen miteinander. (Vergl. Seite 26 unter 31, c.)

Fig. 38.

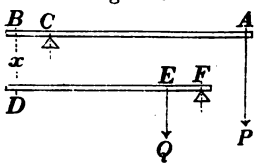


Fig. 39.

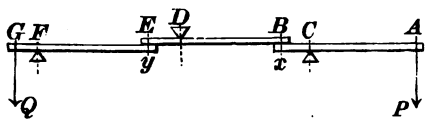
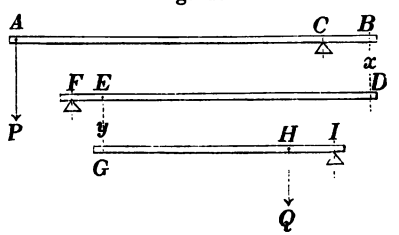


Fig. 40.



Bezeichnet man die an den Verbindungsstangen resp. Berührungsstellen des einen Hebels mit dem anderen stattfindenden Drucke mit x und y, so dafs x für den ersten Hebel die Last und für den zweiten Hebel die Kraft, y für den zweiten Hebel die Last und für den folgenden die Kraft bildet u. s. w., so erhält man für den Gleichgewichtszustand (Fig. 38)

am ersten Hebel: $P \cdot AC = x \cdot BC.$

„ zweiten „ $x \cdot DF = Q \cdot EF.$

Durch Multiplikation beider Gleichungen ergiebt sich:

$$P \cdot AC \cdot x \cdot DF = x \cdot BC \cdot Q \cdot EF.$$

Da sich x auf beiden Seiten hebt, so folgt:

$$P \cdot AC \cdot DF = Q \cdot BC \cdot EF, \text{ mithin:}$$

$$P = \frac{BC \cdot EF}{AC \cdot DF} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 59)$$

$$Q = \frac{AC \cdot DF}{BC \cdot EF} \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 60)$$

Nimmt man nun

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{2} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{5} \text{ oder}$$

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{5} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{2} \text{ u. s. w.}$$

an, so erhält man die Bedingungen der Hebelgesetze für die Dezimalwage, denn es ist in diesen Fällen

$$P = \frac{1}{10} Q.$$

Nimmt man

$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{10} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{10} \text{ oder}$$
$$\frac{BC}{AC} = \frac{1}{20} \text{ und } \frac{EF}{DF} = \frac{1}{5} \text{ u. s. w.}$$

an, so erhält man die Bedingungen der Hebelgesetze für die Centesimalwage, denn es ist alsdann

$$P = \frac{1}{100} Q.$$

Die Wirkung des Hebelwerkes Fig. 39) berechnet sich folgendermafsen:

Für den ersten Hebel ist $P \,.\, AC = x \,.\, BC.$
„ „ zweiten „ „ $x \,.\, BD = y \,.\, ED.$
„ „ dritten „ „ $y \,.\, EF = Q \,.\, GF.$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man:

$$P \,.\, AC \,.\, x \,.\, BD \,.\, y \,.\, EF = x \,.\, BC \,.\, y \,.\, ED \,.\, Q \,.\, GF$$

oder, da sich x und y heben,

$P \,.\, AC \,.\, BD \,.\, EF = Q \,.\, BC \,.\, ED \,.\, GF.$ Folglich:

$$P = \frac{BC \,.\, ED \,.\, GF}{AC \,.\, BD \,.\, EF} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 61)$$

$$Q = \frac{AC \,.\, BD \,.\, EF}{BC \,.\, ED \,.\, GF} \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 62)$$

Ebenso ergiebt die Berechnung des Hebelwerkes Fig. 40):

$$P = \frac{BC \,.\, EF \,.\, HI}{AC \,.\, EF \,.\, GI} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 63)$$

$$Q = \frac{AC \,.\, DF \,.\, GI}{BC \,.\, EF \,.\, HI} \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 64)$$

Es verhält sich mithin bei dergleichen Hebelverbindungen die Kraft zur Last, wie das Produkt der kleineren Hebelarme zum Produkt der gröfseren Hebelarme.

Beispiele:

1) Bei dem zusammengesetzten Hebelwerke Fig. 38) betrage:

$AC = 0{,}7$ m; $BC = 0{,}2$ m;
$DF = 0{,}5$ „; $EF = 0{,}1$ „.

Welche Kraft P kann einer Last $Q = 250$ kg das Gleichgewicht halten?

Nach Formel 59) erhält man:

$$P = \frac{BC \,.\, EF}{AC \,.\, DF} \cdot Q = \frac{0{,}2 \,.\, 0{,}1}{0{,}7 \,.\, 0{,}5} \cdot 250 = 14{,}28 \text{ kg}.$$

2) Welche Last Q kann vermittelst der Hebelverbindung Fig. 40) durch eine Kraft $P = 20$ kg im Gleichgewicht gehalten werden, wenn

$AC = 1{,}2$ m; $BC = 0{,}2$ m;
$DF = 0{,}8$ „; $EF = 0{,}15$ „;
$GI = 0{,}5$ „; $HI = 0{,}1$ „ sind?

Nach Formel 64) erhält man:

$$Q = \frac{AC \,.\, DF \,.\, GI}{BC \,.\, EF \,.\, HI} \,.\, P = \frac{1{,}2 \,.\, 0{,}8 \,.\, 0{,}5}{0{,}2 \,.\, 0{,}15 \,.\, 0{,}1} \,.\, 20 = 3200 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

1) Welche Hebellänge AC ist bei dem zusammengesetzten Hebelwerke Fig. 38) zur Herstellung des Gleichgewichtes erforderlich, wenn

$DF = 0{,}6$ m; $EF = 0{,}08$ m;
$BC = 0{,}2$ „; $P = 20$ kg und
$Q = 500$ kg sind?

Lösung: $AC = 0{,}66$ m.

2) Welche Kraft P kann vermittelst der Hebelverbindung Fig. 39) einer Last $Q = 800$ kg das Gleichgewicht halten, wenn

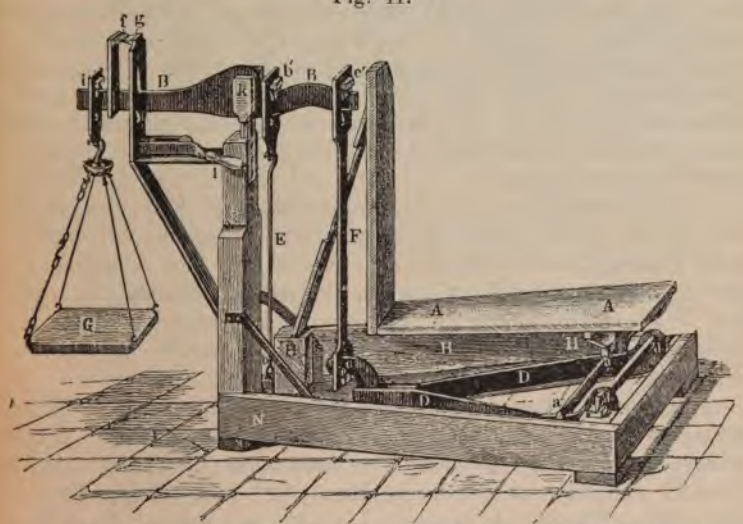
$GF = 0{,}1$ m; $BD = 0{,}7$ m;
$EF = 0{,}4$ „; $BC = 0{,}2$ „;
$DE = 0{,}2$ „; $AC = 0{,}5$ „ sind?

Lösung: $P = 22{,}857$ kg.

Eine der vorteilhaftesten Verwendungen finden die Hebelverbindungen bei der Konstruktion der sogenannten Brückenwagen.

Besonders zu unterscheiden sind die Dezimalwage und die Centesimalwage; erstere soll hier einer kurzen Betrachtung unterworfen werden.

Fig. 41.



Die Dezimalwage, nach ihrem Erfinder die Quintenzsche, oder auch wohl die Strafsburger Brückenwage genannt, ist eine der gebräuchlichsten Wagen, welche überall da Verwendung findet, wo die zu wiegenden Lasten von be-

deutendem Rauminhalt sind. Fig. 41) stellt diese Wage in der Ansicht dar.

Es ist in derselben AA die sogenannte Brücke oder derjenige Teil der Wage, auf welchen die abzuwiegende Last gelegt wird. Dieselbe besitzt die Form eines abgestumpften gleichschenkligen Dreiecks und ist in der Figur zum gröfsten Teil weggelassen, um die unter derselben befindliche Hebelverbindung besser zeigen zu können. Mit dieser Brücke ist ein senkrecht stehendes Brett fest verbunden, gegen welches sich wieder ein schräg stehendes Brett anlegt, so dafs diese drei Teile mit dem dreiseitigen hölzernen Rahmen HH ein fest zusammengehöriges Ganzes bilden. Der Rahmen H sitzt, in der Figur rechts, auf der Stahlschneide aa und ist links bei b in die Stange E eingehängt. Die Schneide aa ist auf dem gabelförmigen, einarmigen Hebel DD befestigt, welcher seine Drehachse in der Stahlschneide dd hat und mit seinem linken Ende c an der Zugstange F hängt. Der gröfseren Deutlichkeit halber ist der Rahmen H, auf welchem die Brücke AA ruht, zu hoch gezeichnet; er ist in der Ausführung so niedrig, dafs, wenn durch Aufschlagen des sogenannten Abstellers l der linke Arm des Hebels BB gehoben wird, der rechte Arm sich so weit senkt, dafs die Brücke AA auf dem Rande des Gestelles N ruht und dann die Schneiden c und c' die Last der Brücke nicht mehr zu tragen haben, damit also aufserordentlich geschont werden. Die beiden Stangen E und F sind ebenfalls vermittelst Stahlschneiden in einen ungleicharmigen Hebel BB eingehängt, welcher sich um seinen festen Stützpunkt K drehen kann; an dessen äufsersten Ende i befindet sich eine Wagschale G, welche zur Aufnahme der Gewichtsstücke dient.

Die horizontale oder Gleichgewichtslage des Hebels BB wird durch zwei vorspringende Ansätze f und g, wovon f mit dem Hebel B fest verbunden ist, angezeigt. Zur Ausgleichung etwaiger Störungen des Gleichgewichtes im Hebelmechanismus der Wage selbst dient die kleine, direkt unter i angebrachte Schale, in welche zu gedachtem Zwecke die sogenannten Tarirgewichte gelegt werden.

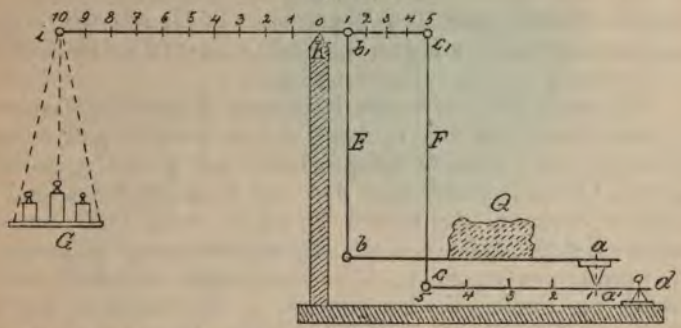
Haupterfordernis bei dieser Wage ist nun, dafs es gleichgültig bleiben mufs, auf welchen Punkt der Brücke die zu wiegende Last gelegt wird. Ferner soll die Wage, ihrem Namen „Dezimalwage“ entsprechend, eine solche sein, dafs das zum Wiegen benützte Gewicht G nur $^1/_{10}$ der zu wiegenden Last Q beträgt.

In Fig. 42) ist schematisch noch einmal die Anordnung der einzelnen Hebel gezeigt und leicht zu übersehen; die Buchstaben sind dieselben wie in Fig. 41). Aus den ein-

getragenen Zahlen gehen die Verhältnisse der Hebellängen hervor und sollen dieselben bei der folgenden Berechnung der Lastverteilung auf die einzelnen Stützpunkte direkt als Zahlenwerte für die Hebellängen benützt werden.

Nimmt man z. B. eine Last von Q = 100 kg an, und denkt man sich diese 100 kg auf die Mitte der Brücke a b gelegt, so verteilen sich dieselben derart, dafs auf die Punkte a und b gleiche Drucke kommen, dafs also in a genau 50 kg und in b ebenfalls 50 kg nach unten wirken; denn umgekehrt müssen nach dem Gesetz über die Wirkung paralleler Kräfte*) die in a und b wirksamen Drucke von je 50 kg zusammen gleich ihrer Mittelkraft Q = 100 kg sein. Der Druck in b überträgt sich direkt durch die Stange E auf den Punkt b_1

Fig. 42.



des Hebels ic_1; es sind demnach im Abstande 1 am Hebelarm kc_1 genau 50 kg thätig. Der Druck im Punkte a überträgt sich direkt auf den Punkt a_1 des einarmigen Hebels cd; demnach entfallen auf den Punkt c des Hebels cd im Abstande 5 nur 50 : 5 = 10 kg, denn diese 10 kg im Abstande 5 wirken nach den Gesetzen über den Hebel genau so, als wie 50 kg im Abstande 1, da ja die statischen Momente $\div 50 . 1 = 10 . 5 \div$ einander gleich sein müssen. Durch die Zugstange F werden die letztgenannten 10 kg auf den Punkt c_1 des Hebels kc_1 im Abstande 5 übertragen.

Es handelt sich jetzt darum, zu ermitteln, welches Gewicht G im Abstande 10, d. i. im Punkte i des Hebels ic_1 wirken mufs, um den Gewichten von 50 kg im Punkte b_1 und von 10 kg im Punkte c_1 das Gleichgewicht zu halten. Nach den Gesetzen über statische Momente**) mufs diesem Fall entsprechend sein:

---

*) Vergl. Seite 75.)
**) Vergl. Seite 78.)

$$G \cdot 10 = 50 \cdot 1 + 10 \cdot 5 \text{ und damit}$$

$$G = \frac{50 + 50}{10} = \frac{100}{10}$$

$$= 10 \text{ kg} = {}^1/_{10} \text{ der Last Q.}$$

Legt man die Last Q = 100 kg so nahe an den Punkt b, dafs auf denselben 80 kg Druck entfallen, so bleiben für die Punkte a und a_1 nur 20 kg übrig. Das entspricht einer Belastung der Punkte c und c_1 von 20 : 5 = 4 kg. Für den Gleichgewichtszustand mufs dementsprechend sein:

$$G \cdot 10 = 80 \cdot 1 + 4 \cdot 5; \text{ mithin}$$

$$G = \frac{80 + 20}{10} = \frac{100}{10}$$

$$= 10 \text{ kg} = {}^1/_{10} \text{ der Last Q.}$$

Es ist also thatsächlich gleichgültig, an welche Stelle der Brücke man die Last legt; es ist das aber auch die Grundbedingung für die Hebelverbindung an der Dezimalwage.

Allgemein stellt sich die Rechnung folgendermafsen:

Bezeichnet man die in den Punkten a und b auftretenden Seitenkräfte der Last Q entsprechend mit p und q, so mufs p + q = Q sein. Setzt man den von p ausgehenden und im Punkte c wirksam werdenden Druck = x, so mufs am einarmigen Hebel cd für den Gleichgewichtszustand x . 5 = p . 1 sein, woraus $x = p/_5$ folgt. Am zweiarmigen Hebel ic_1 wirken demnach im Punkte b_1 das Gewicht q, im Punkte c_1 das Gewicht $p/_5$ und im Punkte i das Gewicht G. Demnach mufs sein:

$$G \cdot 10 = q \cdot 1 + \frac{p}{5} \cdot 5$$

$$= p + q = Q; \text{ mithin}$$

$$G = \frac{Q}{10} = {}^1/_{10} \text{ der Last Q.}$$

Die Einrichtung der Centesimalwage ist entsprechend getroffen, nur mufs bei dieser Hebelverbindung das Gewicht $= {}^1/_{100}$ der abzuwiegenden Last betragen. Auch hier ist es gleichgültig, auf welchen Punkt der Brücke die Last gestellt wird.

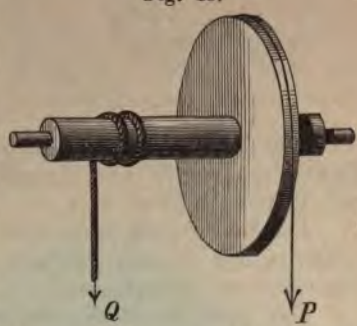
Neuntes Kapitel.

Das Wellrad.

Das Wellrad (oder Rad an der Welle, Fig. 43) besteht aus einer um ihre Achse drehbaren Welle und einer kreisförmigen Scheibe (oder Rad), welche mit der Welle fest verbunden ist.

Am Umfange des Rades oder der Scheibe wirkt die Kraft; an der Welle hängt vermittelst eines Seiles die Last, welche durch Aufwickeln des Seiles auf die Welle bewegt wird. Die Welle kann horizontal, vertikal oder auch geneigt angeordnet sein.

Fig. 43.



Für die Bestimmung des Gleichgewichtszustandes am Wellrade kommen die Gesetze des zweiarmigen Hebels in Betracht.

Bezeichnet man mit R den Halbmesser des Rades und mit r den Halbmesser der Welle, so ist R der Hebelarm der Kraft und r der Hebelarm der Last; mithin für den Gleichgewichtszustand ohne Berücksichtigung der Bewegungshindernisse:

$$P \cdot R = Q \cdot r \text{ woraus folgt:}$$

$$P = \frac{Q \cdot r}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 65)$$

$$Q = \frac{P \cdot R}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 66)$$

Gewöhnlich werden hierbei die Halbmesser R und r immer bis zur Mitte der zugehörigen Seilenden gerechnet.

Beispiele:

1) Welche Kraft ist an einer Welle von 180 mm Durchmesser erforderlich, um eine Last von 500 kg zu heben, wenn der Durchmesser des Rades 2,5 m beträgt?

Nach Formel 65) erhält man:

$$P = \frac{Q \cdot r}{R} = \frac{500 \cdot 0{,}09}{1{,}25} = 36 \text{ kg.}$$

2) Welche Last kann vermittelst eines Wellrades gehoben werden, wenn der Durchmesser der Welle 230 mm, der Durchmesser des Rades 1,6 m und die am Umfange des Rades wirkende Kraft P = 20 kg ist?

Aus Formel 66) erhält man:

$$Q = \frac{P \cdot R}{r} = \frac{20 \cdot 0{,}8}{0{,}115} = 139{,}13 \text{ kg.}$$

3) Welchen Halbmesser mufs man dem Rade geben, wenn durch eine Kraft von 30 kg eine Last von 500 kg gehoben werden soll, welche an einer Welle von 240 mm Durchmesser hängt?

Aus Formel 65) $P = \frac{Q \cdot r}{R}$ ergiebt sich durch Umformung:

$$R = \frac{Q \cdot r}{P} = \frac{500 \cdot 0{,}12}{30} = 2 \text{ m.}$$

4) Wie grofs mufs der Halbmesser der Welle genommen werden, wenn durch eine Kraft von 40 kg, welche an einem Rade von 2,6 m

Durchmesser wirkt, eine Last von 450 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

Aus Formel 65) $P = \frac{Q \cdot r}{R}$ erhält man durch Umformung:

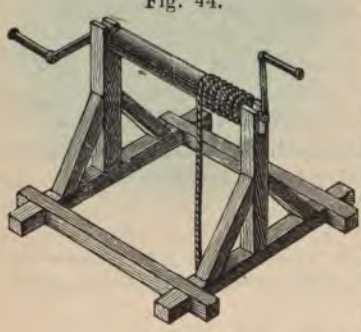
$$r = \frac{P \cdot R}{Q} = \frac{40 \cdot 1{,}3}{450} = 116 \text{ mm}.$$

Das Wellrad kommt in den verschiedensten Gestalten zur Anwendung; als Winde, Haspel, Tretrad, Tretscheibe, Sprossenrad, Göpel, Spillrad u. s. w.

Die Berechnung ist in allen Fällen auf gleiche Weise durchzuführen und es mag genügen, hier nur noch einige allgemeine Bemerkungen beizufügen.

Der gewöhnliche Kurbelhaspel (Fig. 44) hat zwei einander gegenüberstehende, um 90° versetzte Kurbeln von 36 bis 45 cm Armlänge, und eine zur Aufnahme des Seiles dienende Welle von 20—25 cm Durchmesser. Bei einer fortdauernden 8—12 stündigen Arbeitszeit nimmt man die an der Kurbel wirkende Kraft eines Arbeiters zu 8—10 kg an.

Fig. 44.



Wirken an einem solchen Kurbelhaspel zwei Arbeiter zusammen mit einer Kraft P = 16 kg an einer Kurbel von 40 cm Länge und einem Wellen-Halbmesser von 12 cm, so erhält man nach Formel 66) als zu hebende Last:

$$Q = \frac{P \cdot R}{r} = \frac{16 \cdot 40}{12} = 53{,}3 \text{ kg}.$$

Infolge der Bewegungshindernisse, der Reibung der Zapfen in den Lagern, der Steifigkeit der Seile u. s. w. wird aber eine beträchtlich gröfsere Kraft aufgeboten werden müssen, um die Last zu bewältigen. Man nimmt meistens den Reibungs- und Seilsteifigkeitswiderstand zu $\frac{1}{3}$, in günstigen Fällen zu $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ der Last Q an, so dafs in vorstehendem Beispiel die zu hebende Last nur 40 kg betragen dürfte.

Ist die Last gröfser, so mufs ein Rädervorgelege angewendet werden, da die Kurbellänge 40—45 cm nicht überschreiten soll und der Wellen-Durchmesser der Festigkeit wegen nicht unter 20 cm gewählt werden darf. Bei nicht andauernder, sehr kurzer Wirkung auf die Kurbel, kann man die Kraft eines Arbeiters zu 12—16 kg annehmen.

Bei einem durch Menschenkraft getriebenen Göpel oder Tummelbaum, soll der Bahndurchmesser nicht kleiner als 3 m sein. Die Kraft eines Menschen kann man hier etwas höher als bei der Kurbel annehmen, nämlich zu 9—10 kg.

Beim Pferdegöpel nimmt man für ein Pferd gewöhnlichen Schlages eine Zugkraft von 45 kg an; für kräftige Pferde eine solche von 60—70 kg. Der Bahndurchmesser soll mindestens 10 m betragen.

Bei Berechnung des Tretrades (Fig. 45) oder des Laufrades (Fig. 46) ist zu berücksichtigen, dafs die Kraft, welche

Fig. 45.

Fig. 46.

durch das Gewicht des im Rade arbeitenden lebendigen Wesens gebildet wird, nicht an einem dem Radhalbmesser gleichen Hebelarme wirkt, sondern an einem Hebelarme, welcher erhalten wird, indem man durch den Schwerpunkt des arbeitenden Geschöpfes eine Senkrechte gezogen denkt, und auf diese wieder eine Senkrechte vom Drehpunkte aus fällt. Der Erfahrung zufolge ist die von dem betreffenden Arbeiter ausgeübte Kraft gleich $\frac{1}{5}$ seines Gewichtes.

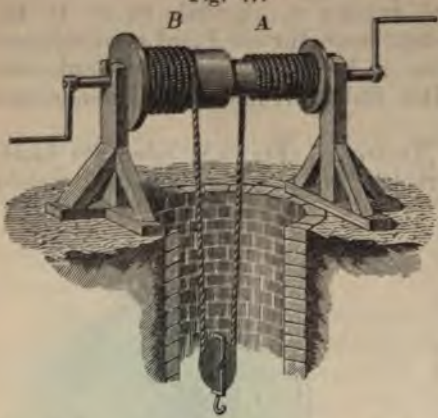
Die Wirkung eines Wellrades ist von der Gröfse des Hebelarmes der Kraft, sowie von dem Halbmesser der Welle abhängig, d. h. die zu hebende Last kann um so gröfser sein, je gröfser der Hebelarm der Kraft und je kleiner der Wellenhalbmesser ist. Diese Gröfsen dürfen aber gewisse Grenzen nicht überschreiten, da der Festigkeit wegen der Wellenhalbmesser nicht zu klein, und des Raumes wegen der Hebelarm der Kraft nicht zu grofs genommen werden darf.

Um diesen Übelständen abzuhelfen, gab man der Welle zwei verschiedene Durchmesser (Fig. 47), schlang das Seil,

3012661

an welchem die Last hängt, um eine lose Rolle und liefs dieses Seil bei der Umdrehung der Welle sich von dem dünnen Teil der Welle A ab-, und auf den stärkeren Teil B aufwickeln. Man nennt diese Vorrichtung Differentialwinde.

Fig. 47.



Die Last Q zerlegt sich hierbei in zwei Seitenkräfte, jede gleich $\frac{1}{2}$ Q, wovon die eine an der Welle A, die andere im entgegengesetzten Sinne an der Welle B wirksam ist.

Bezeichnet P die Kraft, R den Hebelarm der Kraft, r_1 den gröfseren und r_2 den kleineren Wellenhalbmesser, so erhält man als Bedingung für den Gleichgewichtszustand:

$$P \cdot R + \tfrac{1}{2} Q \cdot r_2 = \tfrac{1}{2} Q \cdot r_1 \text{ oder}$$

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{(r_1 - r_2)}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 67)$$

$$Q = 2 . P . \frac{R}{(r_1 - r_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 68)$$

Es ist hieraus ersichtlich, dafs die zu hebende Last nur abhängig ist von dem Unterschiede $(r_1 - r_2)$ der beiden Wellenhalbmesser.

Beispiele:

1) Welche Kraft ist erforderlich, um eine Last von 600 kg im Gleichgewicht zu halten, wenn R = 0,4 m, r_1 = 0,15 m, und r_2 = 0,12 m angenommen werden?

Nach Formel 67) ist:

$$P = \frac{Q}{2} \cdot \frac{(r_1 - r_2)}{R} = \frac{600}{2} \cdot \frac{(0{,}15 - 0{,}12)}{0{,}4} = 22{,}5 \text{ kg}.$$

2) Welche Last Q ist durch eine Kraft P = 20 kg im Gleichgewicht zu halten, wenn R = 0,4 m, r_1 = 0,2 m, und r_2 = 0,18 m betragen?

Nach Formel 68) ist:

$$Q = 2 . P . \frac{R}{(r_1 - r_2)} = 2 . 20 . \frac{0{,}4}{(0{,}2 - 0{,}18)} = 800 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) Welche Last kann vermittelst eines Wellrades gehoben werden, wenn der Durchmesser der Welle = 180 mm, der Raddurchmesser = 1,2 m ist und am Umfange des Rades eine Kraft P = 30 kg wirkt?

Lösung: Q = 200 kg.

2) An einem Kurbelhaspel (Fig. 44) wirken zwei Arbeiter zusammen mit einer Kraft P = 30 kg. Es soll eine Last Q = 100 kg gehoben werden, wenn die Welle einen Durchmesser von 188 mm hat und die Bewegungshindernisse zu $^1/_5$ der Last angenommen werden. Welche Länge erhalten die Kurbeln?

Lösung: R = 0,36 m.

3) Welche Kraft ist erforderlich, um an einer Welle von 150 mm Durchmesser eine Last von 750 kg zu heben, wenn der Durchmesser des Rades 2,8 m beträgt?

Lösung: P = 40,17 kg.

4) Welchen Halbmesser mufs eine Welle erhalten, wenn durch eine Kraft P = 25 kg, welche an einem Rade von 1,5 m Halbmesser wirkt, einer Last Q = 500 kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: r = 0,075 m.

5) Welche Last kann ein Arbeiter vermittelst eines Tretrades (Fig. 45) aufwinden, wenn die ausübende Kraft des Arbeiters zu 15 kg, der Hebelarm der Kraft zu 1,3 m, der Wellenhalbmesser zu 0,12 m und der Reibungs- und Seilsteifigkeitswiderstand zu $^1/_3$ der Last angenommen werden?

Lösung: Q = 122 kg.

6) Welche Kurbellänge R ist bei der Differentialwinde (Fig. 47) erforderlich, um eine Last Q = 750 kg aufzuwinden, wenn die Kraft P = 24 kg, die Wellenhalbmesser $r_1 = 0{,}15$ m und $r_2 = 0{,}13$ m betragen?

Lösung: R = 0,312 m.

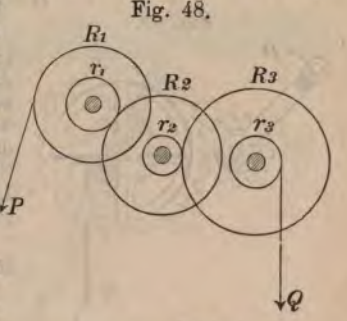
Zehntes Kapitel.

Räderwerke.

Mehrere Wellräder werden untereinander entweder durch Riemen, Seile, Ketten oder Räder verbunden.

In letzterem Falle sitzt auf der Welle, an welcher die Kraft vermittelst einer Kurbel oder eines Rades wirkt, ein kleines Rad, das Getriebe, welches in ein gröfseres Rad auf der zweiten Welle eingreift; an dieser Welle kann wieder ein Getriebe angebracht sein, welches die Bewegung auf ein an der dritten Welle befindliches Rad überträgt u. s. w. (Fig. 48).

Fig. 48.



Um den Zustand des Gleichgewichtes für ein solches Räderwerk herzustellen, verfährt man auf dieselbe Weise wie bei den zusammengesetzten Hebelwerken.

Bezeichnet man die Halbmesser der Räder mit R_1, R_2, R_3, die der Getriebe mit r_1, r_2, r_3; den Druck zwischen dem ersten

und zweiten Wellrade mit x, und den Druck zwischen dem zweiten und dritten Rade mit y, so ist x für das erste Wellrad die Last und für das zweite die Kraft, y für das zweite Wellrad die Last und für das dritte die Kraft. Man hat dann als Bedingung für den Gleichgewichtszustand:

Für das erste Wellrad $P \cdot R_1 = x \cdot r_1$ . . . . I)
„ „ zweite „ $x \cdot R_2 = y \cdot r_2$ . . . . II)
„ „ dritte „ $y \cdot R_3 = Q \cdot r_3$ . . . . III)

Durch Multiplikation*) dieser drei Gleichungen ergiebt sich:

$$P \cdot R_1 \cdot x \cdot R_2 \cdot y \cdot R_3 = x \cdot r_1 \cdot y \cdot r_2 \cdot Q \cdot r_3.$$

Da sich x und y auf beiden Seiten heben, folgt:

$$P \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = Q \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \text{ oder}$$

$$P = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3} \cdot Q \quad \ldots \quad 69)$$

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \cdot P \quad \ldots \quad 70)$$

Würden die Räder mit den Halbmessern R_3 und r_3 ausfallen, so gehen die Formeln 69) und 70) über in:

$$P = \frac{r_1 \cdot r_2}{R_1 \cdot R_2} \cdot Q \quad \ldots \quad 71)$$

$$\text{und } Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P \quad \ldots \quad 72)$$

Als Zahndruck an den Berührungsstellen der Zähne, d. i. im Teilkreise, erhält man aus Gleichung I):

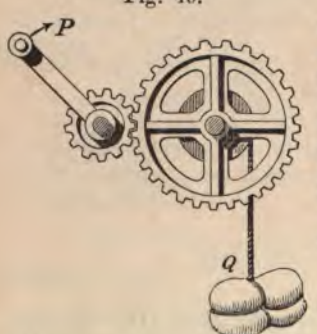
$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} \quad \ldots \quad 73)$$

und aus Gleichung III):

$$y = \frac{Q \cdot r_3}{R_3} \quad \ldots \quad 74)$$

Beispiele:

Fig. 49.



1) An einer Winde, deren Räderwerk in Fig. 49) dargestellt ist, wirken zwei Arbeiter, je mit einer Kraft von 10 kg, an einer 40 cm langen Kurbel. Das an der Kurbelwelle sitzende Trieb hat 6 cm, das Rad an der Trommelwelle 36 cm, die Seiltrommel 10 cm Halbmesser. Welche Last kann durch diese Kraft im Gleichgewicht gehalten werden?

Gegeben sind: $P = 20$ kg, $R_1 = 40$ cm, $R_2 = 36$ cm, $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 10$ cm.

Aus Formel 72) ergiebt sich:

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P = \frac{40 \cdot 36}{6 \cdot 10} \cdot 20 = 480 \text{ kg}.$$

*) Vergl. Seite 26, unter 31, c).

Rechnet man 15% Verlust auf die vorhandenen Widerstände, so würden in Wirklichkeit nur 480—0,15 . 480 = 408 kg als zu hebende Last anzunehmen sein.

Den Zahndruck an der Berührungsstelle erhält man aus Formel 73):

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{20 \cdot 40}{6} = 133{,}33 \text{ kg.}$$

2) Mit vorstehender Winde sollen durch zwei Arbeiter 900 kg gehoben werden. Welchen Halbmesser mufs das Rad auf der Trommelwelle erhalten, wenn der Reibungswiderstände wegen die zu hebende Last zu 1000 kg angenommen wird?

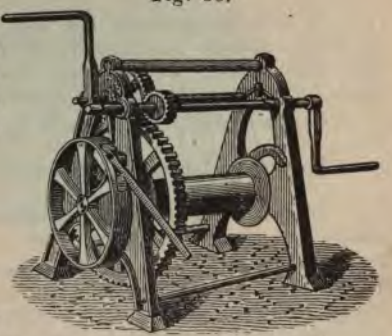
Aus Formel 72) $Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P$ ergiebt sich durch Umformung:

$$R_2 = \frac{Q \cdot r_1 \cdot r_2}{P \cdot R_1} = \frac{1000 \cdot 6 \cdot 10}{20 \cdot 40} = 75 \text{ cm.}$$

3) Bei einer Winde mit doppeltem Rädervorgelege sind gegeben: $R_1 = 40$ cm, $R_2 = 50$ cm, $R_3 = 60$ cm; $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 10$ cm, $r_3 = 15$ cm.

Welche Last kann durch eine Kraft von 24 kg im Gleichgewicht gehalten werden? (Fig. 50.)

Fig. 50.



Nach Formel 70) ist:

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \cdot P =$$

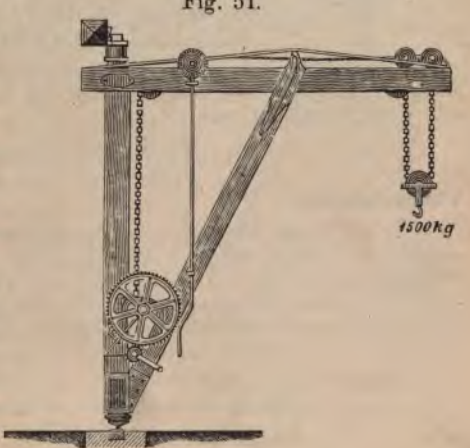
$$\frac{40 \cdot 50 \cdot 60}{6 \cdot 10 \cdot 15} \cdot 24 = 3200 \text{ kg.}$$

Als Zahndruck ergiebt sich aus Formel 73):

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{24 \cdot 40}{6} = 160 \text{ kg,}$$

und aus Formel 74): $y = \frac{Q \cdot r_3}{R_3} = \frac{3200 \cdot 15}{60} = 800$ kg.

Fig. 51.



4) Ein Krahn (Fig. 51) hat zwei Vorgelege mit Kurbeln von 45 cm Länge, an denen je ein Arbeiter mit einer Kraft von 12 kg wirkt. Auf der Kurbelwelle sitzt ein Trieb von 9 cm Halbmesser, welches im Eingriff mit einem Rade von 30 cm Halbmesser auf der Vorgelegewelle steht. Auf dieser sitzt ein Trieb von 12 cm Halbmesser und treibt ein Rad auf der Kettentrommelwelle von 60 cm Halbmesser.

Wie grofs mufs der Halbmesser der Kettentrommel genommen werden,

wenn durch die Arbeiter eine Last von 1500 kg, ohne Rücksicht auf Reibung, gehoben werden soll?

Gegeben sind:

$$P = 24 \text{ kg}, \quad R_1 = 45 \text{ cm}, \quad R_2 = 30 \text{ cm}, \quad R_3 = 60 \text{ cm};$$
$$r_1 = 9 \text{ „}, \quad r_2 = 12 \text{ „}, \quad Q = 1500 \text{ kg}.$$

Aus Formel 70) $Q = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3} \cdot P$ erhält man:

$$r_3 = \frac{R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 \cdot P}{r_1 \cdot r_2 \cdot Q} = \frac{45 \cdot 30 \cdot 60 \cdot 24}{1500 \cdot 9 \cdot 12} = 12 \text{ cm}.$$

Als Zahndrucke erhält man:

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{24 \cdot 45}{9} = 120 \text{ kg},$$

und $$y = \frac{Q \cdot r_3}{R_3} = \frac{1500 \cdot 12}{60} = 300 \text{ kg}.$$

5) Eine Wagenwinde hat eine Kurbel von 30 cm Länge und ein in die Zahnstange eingreifendes Trieb von 6 cm Durchmesser. Welche Last können zwei Arbeiter mit dieser Winde heben, wenn die Kraft eines Arbeiters zu 15 kg angenommen wird?

Gegeben sind: $P = 30 \text{ kg}, \quad R_1 = 30 \text{ cm}, \quad r_1 = 3 \text{ cm}.$

Folglich entsprechend Formel I): $Q = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{30 \cdot 30}{3} = 300 \text{ kg}.$

Diese 300 kg entsprechen zugleich dem Zahndruck in der Zahnstange und im eingreifenden Trieb.

6) Bei einer anderen Wagenwinde mit einer Kurbel von 30 cm Länge sitzt an der Kurbelwelle ein Trieb von 6 cm Durchmesser. Dieses treibt ein Rad von 13 cm Durchmesser, mit dessen Welle das in die Zahnstange eingreifende Trieb von 9 cm Durchmesser verbunden ist. Welche Last können zwei Arbeiter überwinden, wenn die Kraft eines jeden zu 15 kg angenommen wird?

Gegeben sind: $P = 30 \text{ kg}, \quad R_1 = 30 \text{ cm}, \quad R_2 = 6{,}5 \text{ cm};$
$r_1 = 3 \text{ „}, \quad r_2 = 4{,}5 \text{ „}.$

Mithin nach Formel 72):

$$Q = \frac{R_1 \cdot R_2}{r_1 \cdot r_2} \cdot P = \frac{30 \cdot 6{,}5 \cdot 30}{3 \cdot 4{,}5} = 433{,}3 \text{ kg}.$$

Diese 433,3 kg entsprechen zugleich dem Zahndruck in der Zahnstange. Der Zahndruck in dem Trieb von 6 cm Durchmesser berechnet sich nach Formel 73) zu:

$$x = \frac{P \cdot R_1}{r_1} = \frac{30 \cdot 30}{3} = 300 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) Bei einem Räderwerk, wie in Fig. 48) dargestellt, soll der Halbmesser des Rades auf der Trommelwelle derartig bestimmt werden, daſs mit einer Kraft von 25 kg eine Last von 2000 kg gehoben werden kann. Welchen Halbmesser muſs R_3 erhalten und wie groſs sind die Zahndrucke an den Berührungsstellen der Zähne, wenn gegeben sind:

$$R_1 = 40 \text{ cm}, \quad R_2 = 50 \text{ cm};$$
$$r_1 = 6 \text{ „}, \quad r_2 = 10 \text{ „}, \quad r_3 = 20 \text{ cm}.$$

Lösung: $R_3 = 48 \text{ cm}; \quad x = 166{,}7 \text{ kg};$
$y = 833{,}3 \text{ kg}.$

2) Welche Last kann vermittelst des Räderwerkes Fig. 48) durch einen Arbeiter, welcher an der Kurbel mit 12 kg wirkt, gehoben werden, wenn gegeben sind:

$R_1 = 45$ cm, $R_2 = 54$ cm, $R_3 = 60$ cm;
$r_1 = 12$ „, $r_2 = 15$ „, $r_3 = 9$ „.

Lösung: $Q = 1080$ kg.

3) Welche Kraft ist erforderlich, um mit einem Krahn (Fig. 51) eine Last von 3000 kg zu heben, wenn gegeben sind:

$R_1 = 45$ cm, $R_2 = 54$ cm, $R_3 = 75$ cm;
$r_1 = 10$ „, $r_2 = 12$ „, $r_3 = 15$ „.

Lösung: $P = 30$ kg (abgerundet).

4) Welchen Halbmesser erhält die Trommel einer Windenvorrichtung, wenn gegeben sind:

$R_1 = 44{,}8$ cm, $R_2 = 26$ cm, $R_3 = 62{,}4$ cm;
$r_1 = 5{,}2$ „, $r_2 = 10{,}4$ „;
$Q = 3600$ kg, $P = 30$ kg.;

Lösung: $r_3 = 11{,}2$ cm.

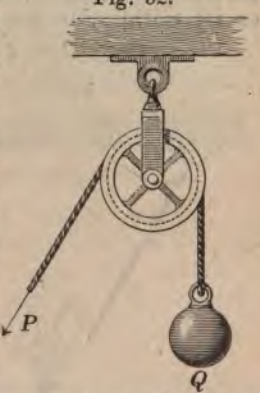
Elftes Kapitel.

Die Rolle.

Die Rolle ist eine kreisrunde mit konzentrischer Achse versehene bewegliche Scheibe, deren Umfang zur Aufnahme eines Seiles, eines Riemens oder einer Kette vorgerichtet ist.

Man unterscheidet feste und lose Rollen. Eine feste Rolle (Fig. 52) ist eine solche, welche nur eine drehende Bewegung um eine feste, ihren Ort nicht verändernde Achse annehmen kann; sie ist von einem Seile umschlungen, an dessen einem Ende die Last, und an dessen anderem Ende die Kraft wirkt.

Fig. 52.



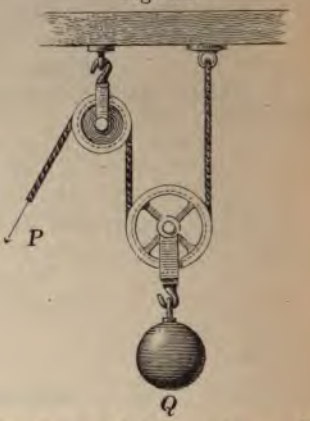
Zieht man in nebenstehender Figur aus dem Mittelpunkte der Rolle Normalen zu den Richtungslinien von P und Q, so ist die Verbindung derselben als ein gleicharmiger Hebel aufzufassen, an welchem Gleichgewicht stattfinden wird, wenn die Kraft ebenso grofs ist als die Last. Hieraus folgt, dafs bei der festen Rolle an Kraft nichts gewonnen, d. h. gespart wird, und dieselbe nur dazu dient, eine Veränderung in der Kraftrichtung herbeizuführen. Um Bewegung zu ermöglichen, mufs sogar

die Kraft, der Reibung und der Steifigkeit der Seile wegen, gröfser sein als die Last.

Eine lose Rolle (Fig. 53) ist eine solche, welche sich nicht nur um ihren Mittelpunkt dreht, sondern sich mit der Last, welche in der Rollenmitte an einem sogenannten Kloben befestigt ist, hebt und senkt; also ihren Ort verändert.

Fig. 53.

Fig. 54.

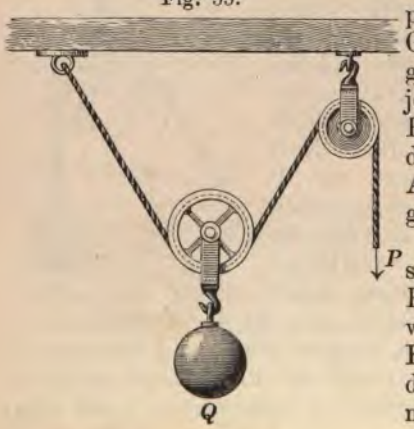


Verschiedene Anordnungen der losen Rolle sind aus den Fig. 53, 54 und 55) ersichtlich; der besseren Leitung wegen wird das Seilende, an welchem die Kraft wirkt, gewöhnlich noch um eine feste Rolle geschlungen.

Sind die Seilenden wie in Fig. 53 und 54) parallel gerichtet, so hat jedes derselben die halbe Last zu tragen; es ist mithin für den Gleichgewichtszustand:

$$P = \tfrac{1}{2} . Q \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 75)$$

Fig. 55.



Sind die Seilenden nicht parallel (Fig. 55), so ist der Gewinn an Kraft nicht so grofs; er wird um so geringer, je mehr die Seilenden vom Parallelismus abweichen. Für die in Fig. 55) dargestellte Anordnung ergiebt sich folgendes Gesetz:

Gleichgewicht findet statt, wenn sich die Kraft zur Last verhält, wie der Halbmesser der Rolle zur Sehne des von dem Seil umschlungenen Bogens.

Bezeichnet man den Halbmesser der Rolle mit r, die Sehne des von dem Seile umschlungenen Bogens mit s, so erhält man für den Gleichgewichtszustand:

$$P : Q = r : s, \text{ woraus folgt:}$$

$$P = \frac{Q \cdot r}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 76)$$

$$Q = \frac{P \cdot s}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 77)$$

Beispiele:

1) Durch die in Fig. 54) dargestellte Rollenverbindung soll eine Last von 100 kg gehoben werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Aus Formel 75) erhält man:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot Q = \frac{100}{2} = 50 \text{ kg}.$$

Nimmt man die Bewegungswiderstände zu $^1/_{10} = 10\,\%$ der Last an, so folgt:

$$P = 50 + 0{,}1 \cdot 100 = 50 + 10 = 60 \text{ kg}.$$

2) Welche Last Q kann vermittelst der in Fig. 55) dargestellten Rollenverbindung durch eine Kraft P = 60 kg gehoben werden, wenn der Radius der losen Rolle r = 20 cm und die Sehne s = 30 cm angenommen werden?

Aus Formel 77) erhält man:

$$Q = \frac{P \cdot s}{r} = \frac{60 \cdot 30}{20} = 90 \text{ kg}.$$

Werden auch hier die Widerstände zu $^1/_{10} = 10\,\%$ der Last angenommen, so folgt:

$$Q = 90 - 0{,}1 \cdot 90 = 90 - 9 = 81 \text{ kg}.$$

Will man mit geringer Kraft vermittelst der Rollen grofse Lasten heben oder senken, so verbindet man mehrere feste und lose Rollen mit einander. Solche Verbindungen nennt man Rollen- oder Flaschenzüge. Man unterscheidet hierbei folgende Arten:

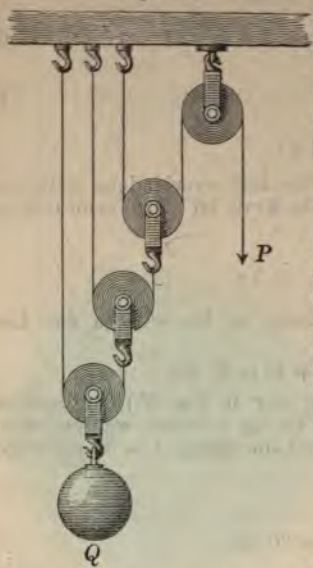
1) Der Rollenzug oder Potenzflaschenzug.

Derselbe besteht aus mehreren losen Rollen, welche vermittelst einer gleich grofsen Anzahl Seile auf die aus Fig. 56) ersichtliche Weise mit einander in Verbindung gebracht werden. An der untersten Rolle hängt die Last Q, während die Kraft P an dem über die feste Rolle geschlungenen Seilende wirkt.

Nimmt man 3 lose Rollen und parallele Seilrichtungen an, so ist nach Vorstehendem der Zug in dem an der zweiten Rolle befestigten Seilende des um die erste Rolle geschlungenen Seiles gleich der halben Last, also $= \frac{1}{2}$ Q. Dieser Zug bildet aber die an der zweiten Rolle wirkende Last, mithin ist

die Spannung des an der dritten Rolle befestigten Seilendes wiederum nur gleich der halben, an der zweiten losen Rolle wirkenden Last, also $= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\,Q) = \frac{1}{4}\,Q$. und aus demselben Grunde der Zug in dem über die feste Rolle geführten Seilende $= \frac{1}{2}(\frac{1}{4}\,Q) = \frac{1}{8}\,Q$; folglich für den Gleichgewichtszustand, ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse und das der Kraft entgegenwirkende Eigengewicht der Rollen

Fig. 56.



$$P = \tfrac{1}{8}\,Q \quad \ldots\ldots \quad 78)$$

woraus folgt: $Q = 8\,.\,P \quad \ldots\ldots \quad 79)$

d. h. man kann mit einem solchen Potenzflaschenzuge eine Last bewältigen, welche 8 mal so grofs ist als die an dem Zuge thätige Kraft. Formel 78) kann, wenn man berücksichtigt, dafs $8 = 2^3$ ist, auch noch wie folgt geschrieben werden:

$$P = \frac{Q}{2^3},$$ woraus unmittelbar folgt:

$$Q = 2^3\,.\,P.$$

Wären in dem Zuge 4 lose Rollen vorhanden, so müfste

$$P = \tfrac{1}{16}\,.\,Q = \frac{Q}{16} = \frac{Q}{2^4}$$ sein, woraus sich dann

$$Q = 2^4\,.\,P$$ ergiebt.

In den letzten Formeln erscheint die Zahl 2 immer in der Potenz, welche der Anzahl der in dem Zuge vorhandenen losen Rollen entspricht; bezeichnet man diese Anzahl allgemein mit n, so folgt entsprechend:

$$P = \frac{Q}{2^n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 80)$$

$$Q = 2^n\,.\,P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 81)$$

Hieraus ist ersichtlich, dafs ohne Rücksicht auf Hindernisse, die Last mit der n^{ten} Potenz von 2 zunehmen kann. Bei 4 losen Rollen braucht man demnach nur den $2^4 = 16^{ten}$ und bei 6 losen Rollen nur den $2^6 = 64^{ten}$ Teil der Last als erforderliche Kraft.

2) Der gemeine Flaschenzug.

Derselbe besteht aus mehreren festen Rollen a und mehreren losen Rollen b, welche in einem gemeinschaftlichen Gehäuse, der sogenannten Flasche untergebracht sind, und in

der aus den Fig. 57, 58 und 59) ersichtlichen Weise von einem in c befestigten Seile umschlungen werden.

Ist dieses Seil an der festen Flasche befestigt, wie Fig. 57) zeigt, so ist stets die gleiche Anzahl Rollen in jeder Flasche erforderlich; ist es aber an der losen, beweglichen Flasche fest gemacht, wie in Fig. 58), so mufs in der festen Flasche stets eine Rolle mehr vorhanden sein.

Fig. 57.

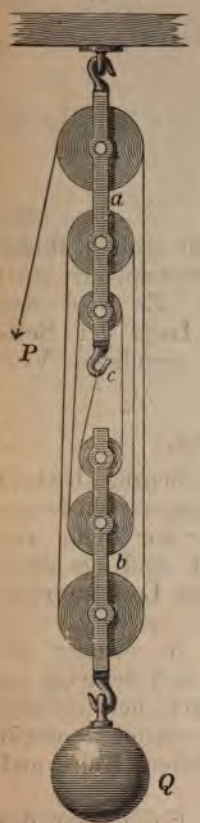


Fig. 58.

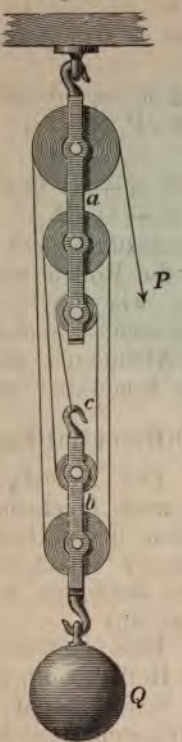
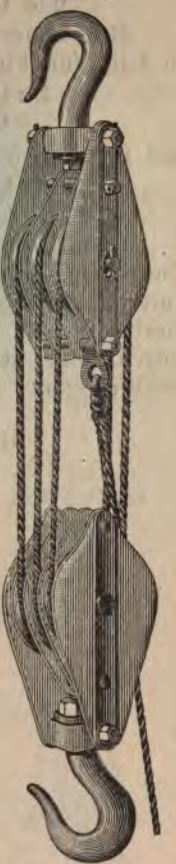


Fig. 59.



In beiden Fällen verteilt sich die Last gleichmäfsig auf die Anzahl der Seilenden; es ist daher die Spannung der Seilenden im ersten Fall, bei 6 Rollen $= \frac{1}{6}$ Q, und im zweiten, bei 5 Rollen $= \frac{1}{5}$ Q, infolgedessen auch

$$P = \frac{1}{6} Q \text{ oder } P = \frac{1}{5} Q$$

wird, woraus für den Gleichgewichtszustand folgt:

$P : Q = 1 : 6$ (Fig. 57) und
$P : Q = 1 : 5$ (Fig. 58).

Bezeichnet allgemein bei einem gewöhnlichen Flaschenzuge n die Anzahl der Rollen überhaupt, so verhält sich entsprechend:

$$P : Q = 1 : n \text{ oder}$$

$$P = \frac{Q}{n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 82)$$

$$\text{und } Q = P \cdot n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 83)$$

Bezeichnet man mit m die Anzahl der losen Rollen, so folgt für Fig. 57):

$$P : Q = 1 : 2\,m \text{ und damit}$$

$$Q = 2\,m \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 84)$$

und für Fig. 58):

$$P : Q = 1 : (2\,m + 1) \text{ und damit}$$

$$Q = (2\,m + 1) \cdot P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 85)$$

Damit diese Flaschenzüge nicht einen zu grofsen Raum einnehmen, kann man die Rollen auch nebeneinander, statt untereinander anordnen, wie Fig. 59) zeigt. Es wird sich hierbei jedoch der schiefen, verschränkten Lage der Seile wegen, eine stärkere Abnutzung und eine ziemliche Vergröfserung der Reibung bemerkbar machen.

3) Der Differential-Flaschenzug.

Fig. 60.

Der Differential-Flaschenzug besteht aus zwei, in einem Stück gegossenen festen Rollen, deren Durchmesser nur wenig von einander verschieden sind, und aus einer losen Rolle, an welcher die Last angreift. (Fig. 60.)

Eine endlose Kette, in welcher die lose Rolle hängt, schlingt sich derartig um die festen Rollen, dafs sich bei abwärts gerichtetem Zuge die Kette von der kleineren Rolle ab- und auf die gröfsere Rolle aufwickelt.

Bezeichnet man den Halbmesser der gröfseren Rolle mit R, den der kleineren mit r, so folgt für den Gleichgewichtszustand, da die Spannung in den beiden Kettenenden je $\frac{1}{2}\,Q$ beträgt:

$$P \cdot R + \tfrac{1}{2}\,Q \cdot r = \tfrac{1}{2}\,Q \cdot R, \text{ d. h.}$$

$$P = \frac{R - r}{2R} \cdot Q \quad \ldots\ldots \quad 86)$$

$$\text{und} \qquad Q = \frac{2R}{R - r} \cdot P \quad \ldots\ldots \quad 87)$$

Beispiele:

1) Welche Kraft ist erforderlich, um bei einem gewöhnlichen Flaschenzuge mit 6 Rollen einer Last $Q = 300$ kg das Gleichgewicht zu halten?

Nach Formel 82) ist:

$$P = \frac{Q}{n} = \frac{300}{6} = 50 \text{ kg.}$$

2) Welcher Last kann durch eine Kraft von 20 kg, bei Anwendung eines gewöhnlichen Flaschenzuges mit 8 Rollen, das Gleichgewicht gehalten werden?

Nach Formel 83) erhält man:

$$Q = P \,.\, n = 20 \,.\, 8 = 160 \text{ kg.}$$

3) Welche Last kann bei einem Kraftaufwande von 25 kg durch einen Potenzflaschenzug mit 4 losen Rollen gehoben werden?

Aus Formel 81) folgt:

$$Q = P \,.\, 2^n = 25 \,.\, 2^4 = 25 \,.\, 16 = 400 \text{ kg.}$$

4) Welche Kraft P ist bei Anwendung eines Differential-Flaschenzuges erforderlich, um einer Last $Q = 500$ kg das Gleichgewicht zu halten, wenn $R = 0{,}13$ m und $r = 0{,}12$ m angenommen werden?

Nach Formel 86) ist:

$$P = \frac{R - r}{2R} \,.\, Q = \frac{0{,}13 - 0{,}12}{2 \,.\, 0{,}13} \,.\, 500 = 19{,}2 \text{ kg.}$$

5) Eine Last von 400 kg soll durch eine Kraft von 35 kg vermittelst eines Differential-Flaschenzuges gehoben werden. Der Radius der grofsen Rolle beträgt 0,10 m; welchen Radius mufs die kleine Rolle erhalten?

Aus Formel 86) $P = \frac{R - r}{2R} \,.\, Q$ folgt:

$$r = \frac{Q \,.\, R - 2P \,.\, R}{Q} = \frac{400 \,.\, 0{,}1 - 2 \,.\, 35 \,.\, 0{,}1}{400} = 82{,}5 \text{ mm.}$$

Übungsbeispiele:

1) Welche Last Q kann vermittelst der in Fig. 54) dargestellten Rollenverbindung durch eine Kraft $P = 50$ kg gehoben werden?

Lösung: $Q = 100$ kg.

2) Vermittelst der in Fig. 55) dargestellten Rollenverbindung soll eine Last $Q = 120$ kg gehoben werden; der Halbmesser der Rolle betrage 26 cm und die Sehne des vom Seil umspannten Bogens 40 cm. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Lösung: $P = 78$ kg.

3) Welche Last können 4 Arbeiter, die zusammen einen Zug von 48 kg ausüben, vermittelst eines Potenzflaschenzuges, bestehend aus 6 losen Rollen, heben?

Lösung: $Q = 3072$ kg.

4) Welche Kraft ist erforderlich, um durch einen gewöhnlichen Flaschenzug mit 8 Rollen eine Last von 150 kg zu heben?

Lösung: $P = 18{,}75$ kg.

5) Welche Last können 2 Arbeiter, die zusammen einen Zug von 30 kg ausüben, an einem gewöhnlichen Flaschenzuge heben, wenn derselbe aus 7 Rollen besteht und die bewegliche Flasche ein Gewicht von 12 kg hat?

Lösung: $Q = 198$ kg.

6) Wie viel Rollen mufs man einem gewöhnlichen Flaschenzuge geben, wenn ein Arbeiter mit einer Kraft von 15 kg eine Last von 150 kg heben soll?

Lösung: n = 10 Rollen.

7) Welche Last kann ein Arbeiter, welcher einen Zug von 16 kg ausübt, vermittelst eines Differential-Flaschenzuges heben, wenn der Halbmesser der gröfseren Rolle R = 0,1 m und derjenige der kleineren Rolle r = 0,08 m beträgt?

Lösung: Q = 160 kg.

8) Vermittelst eines Differentialflaschenzuges soll eine Last von 500 kg gehoben werden. Der Halbmesser der grösseren Rolle betrage 0,13 m, der Halbmesser der kleineren Rolle 0,12 m. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Lösung: P = 19,2 kg.

Bei allen Rollenverbindungen und Flaschenzügen bilden Reibung und Seilsteifigkeit ein aufserordentliches Bewegungshindernis. Bei gewöhnlichen Flaschenzügen mit 2 bis 3 Rollen in jeder Flasche sind die Widerstände zu $\frac{1}{3}$ bis zu $\frac{1}{2}$ der Last zu veranschlagen, so dafs man, um sicher zu gehen, $\frac{4}{3}$ Q bis $\frac{3}{2}$ Q in die Rechnung einführen mufs. Mit wachsender Rollenzahl steigern sich die Widerstände derart, dafs unter Umständen kaum noch von einem Kraftgewinn die Rede sein kann. Überdies mufs nach den Gesetzen über „Mechanische Arbeit“ die Kraft einen soviel mal gröfseren Weg machen, als die Last gröfser ist, wie die Kraft. In den folgenden Gleichungen sind die Kraftwege der hier besprochenen Rollenverbindungen festgelegt. Bezeichnet man mit

S den Weg der Kraft,

s den Weg der Last,

so ist für den Potenzflaschenzug:

$$s = \frac{S}{2^n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 88)$$

und besonders für den Zug nach Fig. 56):

$s = \frac{S}{2^3} = \frac{S}{8}$; d. h. die Kraft macht den 8-fachen Weg der Last.

Für den gemeinen Flaschenzug folgt:

$$s = \frac{S}{n} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 89)$$

und besonders für den Zug nach Fig. 57):

$s = \frac{S}{6}$ und für den Zug nach Fig. 58):

$s = \frac{S}{5}$.

Für den Differential Flaschenzug nach Fig. 60) folgt:

$$s = \frac{R-r}{2 \cdot R} \cdot S \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 90)$$

Zwölftes Kapitel.

Die schiefe Ebene.

Unter einer schiefen Ebene versteht man eine ebene Fläche, welche mit einer horizontalen Ebene irgend einen spitzen Winkel bildet. In nebenstehender Fig. 61) heifsen: AB die Basis, AC die Länge und BC die Höhe der schiefen Ebene.

Fig. 61.

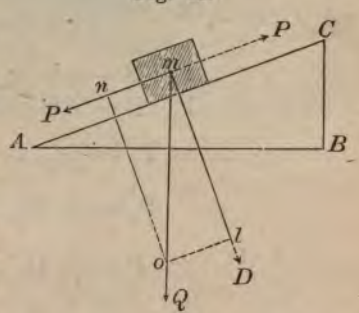
Bei der schiefen Ebene ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen eine auf derselben ruhende Last im Gleichgewicht gehalten oder fortbewegt werden kann.

Folgende Fälle sind hierbei hauptsächlich in Betracht zu ziehen:

1) Die Kraft wirkt parallel zur Länge der schiefen Ebene.

Man zerlege in Fig. 62) die Last Q in zwei rechtwinkelig zu einander stehende Seitenkräfte, von denen die eine, P = mn, parallel und die andere, D = lm, senkrecht zur Länge der schiefen Ebene wirkt. Die Seitenkraft lm giebt den von der Last Q auf die schiefe Ebene ausgeübten Druck D an, während mn die Kraft P darstellt, welche die Last in der Richtung der schiefen Ebene nach abwärts zu bewegen sucht. Um die Last auf der schiefen Ebene im Gleichgewicht zu erhalten, mufs eine gleich grofse Kraft mn = P, aber entgegengesetzt gerichtet, wirksam sein. Es verhält sich demnach

Fig. 62.



$$P : Q = mn : mo.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke omn und ABC folgt aber:

$$mn : mo = BC : AC, \text{ mithin:}$$

$$P : Q = BC : AC, \text{ oder}$$

$$P = \frac{BC}{AC} \cdot Q.$$

Bezeichnet man die Höhe der schiefen Ebene mit h, die Länge mit l und die Basis mit b, so erhält man, wenn diese Bezeichnungen in die letzte Gleichung eingesetzt werden:

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 91)$$

Der Druck D, welchen die Last Q auf die schiefe Ebene ausübt, ergiebt sich aus der Proportion:

$$D : Q = lm : mo.$$

Da aber die Dreiecke lmo und ABC ähnlich sind, folgt auch hier:

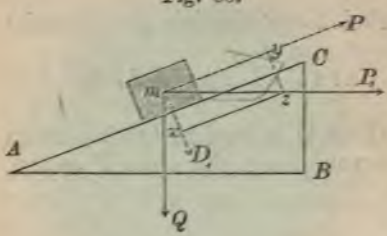
$$D : Q = AB : AC, \text{ mithin:}$$

$$D = \frac{AB}{AC} \cdot Q, \text{ oder was dasselbe ist,}$$

$$D = \frac{b}{l} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 92)$$

2) Die Kraft wirkt parallel zur Basis der schiefen Ebene.

Fig. 63.



Man zerlege in Fig. 63) die Kraft P_1 in die beiden zu einander rechtwinkeligen Seitenkräfte $my = P$ und $mx = D_1$, so giebt D_1 den von P_1 auf die schiefe Ebene ausgeübten Druck an, um welchen der Druck von Q auf die schiefe Ebene also noch vermehrt wird. Hierbei verhält sich:

$$P_1 : P = mz : my, \text{ oder}$$

$$P_1 : P = AC : AB, \text{ folglich:}$$

$$P_1 = \frac{AC}{AB} \cdot P \text{ oder was dasselbe ist,}$$

$$P_1 = \frac{l}{b} \cdot P. \quad \text{Nach Formel 91) ist aber:}$$

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q. \quad \text{Diesen Wert für P in die vorstehende Gleichung eingesetzt, ergiebt:}$$

$$P_1 = \frac{l}{b} \cdot \frac{h}{l} \cdot Q, \text{ oder}$$

$$P_1 = \frac{h}{b} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 93)$$

Für den von P_1 auf die schiefe Ebene ausgeübten Druck erhält man:

$$D_1 = \frac{h}{l} \cdot P_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 94)$$

Wirkt die Kraft weder parallel zur Länge noch parallel zur Basis der schiefen Ebene, so sind die in der Figur bei Zerlegung der Kraft entstehenden Dreiecke nicht mehr dem Grunddreieck ABC ähnlich, und lassen sich dann auch die Bedingungen für den Gleichgewichtszustand nicht mehr so einfach aufstellen und nachweisen, als in den vorstehend auf-

geführten Fällen. Ohne Anwendung komplizierter Rechnungsarten kann die Auflösung derartiger Aufgaben nur durch Konstruktion — graphische Darstellung — erfolgen.

Beispiele:

1) Eine schiefe Ebene steigt auf 15 m Länge um 1 m; auf derselben befindet sich eine Last von 600 kg, welche durch eine parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkende Kraft im Gleichgewicht gehalten werden soll. Wie grofs mufs diese Kraft sein?

Nach Formel 91) erhält man:

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q = \frac{1 \cdot 600}{15} = 40 \text{ kg}.$$

2) Durch eine parallel zur Basis wirkende Kraft von 100 kg soll auf einer schiefen Ebene, welche bei einer Länge der Basis von 30 m um 6 m steigt, eine Last im Gleichgewicht gehalten werden. Wie grofs kann diese Last sein?

Nach Formel 93) ist $P_1 = \frac{h}{b} \cdot Q$; hieraus folgt:

$$Q = \frac{P_1 \cdot b}{h} = \frac{100 \cdot 30}{6} = 500 \text{ kg}.$$

3) Welche Höhe mufs man dieser schiefen Ebene geben, wenn mit derselben Kraft eine Last von 1200 kg im Gleichgewicht gehalten werden soll?

Aus Formel 93) ergiebt sich:

$$h = \frac{P_1 \cdot b}{Q} = \frac{100 \cdot 30}{1200} = 2{,}5 \text{ m}.$$

4) Fünf Wagen, je zu 1000 kg Gewicht, sollen auf einer Eisenbahn, welche im Verhältnis 1 : 50 steigt, befördert werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich?

Nach Formel 91) erhält man:

$$P = \frac{h}{l} \cdot Q = \frac{1}{50} \cdot 5 \cdot 1000 = 100 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) Durch eine parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkende Kraft von 50 kg soll eine Last von 750 kg im Gleichgewicht gehalten werden, wenn die Höhe der schiefen Ebene 1,5 m beträgt. Welche Länge mufs die schiefe Ebene erhalten?

Lösung: $l = 22{,}5$ m.

2) Welchen Druck übt eine Last von 800 kg auf eine schiefe Ebene aus, deren Basis = 18 m und deren Länge = 20 m ist?

Lösung: $D = 720$ kg.

3) Eine Last von 855 kg soll durch eine parallel zur Basis einer schiefen Ebene wirkende Kraft im Gleichgewicht gehalten werden, wenn die Höhe der schiefen Ebene 2 m und deren Basis 27 m beträgt. Wie grofs ist die hierzu erforderliche Kraft?

Lösung: $P = 63{,}3$ kg.

4) Welchen Druck übt eine parallel zur Basis einer schiefen Ebene wirkende Kraft von 120 kg aus, wenn die Höhe der schiefen Ebene = 3 m und deren Länge = 18 m ist?

Lösung: $D_1 = 20$ kg.

5) Welche Länge erhält die Basis einer schiefen Ebene, deren Höhe = 1,5 m ist, wenn durch eine parallel zur Basis wirkende Kraft von 60 kg einer Last von 500 kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: b = 12,5 m.

6) Die Steigung einer schiefen Ebene zur Basis sei 30°; wie grofs mufs die parallel zur Länge dieser schiefen Ebene wirkende Kraft sein, um das Herabrollen einer Kugel von 900 kg Gewicht zu verhindern?

Lösung: P = 450 kg.

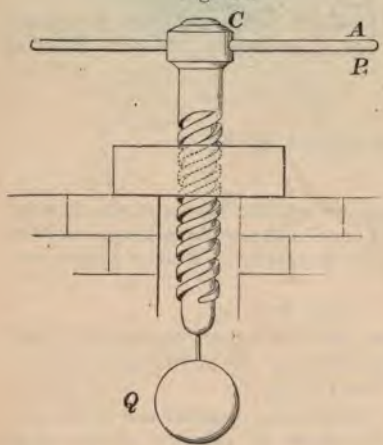
Dreizehntes Kapitel.

Die Schraube.

Wird an der Aufsenseite eines Cylinders ein Punkt derartig herumgeführt, dafs er stets um dieselbe Gröfse steigt, also seine Richtung immer denselben Neigungswinkel beibehält, so nennt man die hierdurch entstehende doppelt gekrümmte Linie eine Schraubenlinie.

Wird ein biegsamer, prismatischer Körper auf dieser Schraubenlinie so um den Cylinder gewunden, dafs immer eine Seite des Körpers an dem Cylinder anliegt, so nennt man die entstehende Hervorragung ein Schraubengewinde. Eine einzige der so entstandenen Windungen heifst Schraubengang, und wenn mehrere derartige Gänge vorhanden sind, das Ganze Schraubenspindel oder kurz Schraube.

Fig. 64.



Je nach der Form des umgewundenen Prismas entsteht flaches oder spitzes Gewinde.

Jeder einzelne Schraubengang ist als eine schiefe Ebene aufzufassen, deren Basis gleich dem Umfange der Schraubenspindel, und deren Höhe gleich der Steigung eines Schraubenganges ist.

Denkt man sich eine Schraube in der durch Fig. 64) dargestellten Anordnung und sieht man von den vorhandenen Bewegungswiderständen ab, so wird die Schraubenspindel sowohl infolge ihres eigenen Gewichtes, als auch infolge einer angehängten Last Q ein Bestreben haben, sich abwärts zu

bewegen, durch welches sie, unter stetiger Drehung in den Gängen des Muttergewindes, genau wie auf einer schiefen Ebene, herabgleiten würde. Diesem Bestreben, herabzugleiten, soll nun durch eine, entweder am Umfange der Schraube oder an einem gröfseren Hebelarme wirkende, in jedem Falle aber horizontal gerichtete Kraft P entgegengearbeitet, und dadurch der Gleichgewichtszustand herbeigeführt werden.

Es sind hierbei die Gesetze der schiefen Ebene in betracht zu ziehen und zwar ist speziell Fall 2) ins Auge zu fassen, in welchem die Kraft parallel zur Basis der schiefen Ebene gerichtet ist. Für diesen Fall folgt aus Formel 93):

$$P = \frac{h}{b} \cdot Q,$$

in welcher Gleichung für die Anwendung auf die Schraube: h = der Ganghöhe der Schraube und b = dem Umfange derselben zu setzen ist. Bezeichnet man den mittleren Schraubenhalbmesser mit r und die Steigung mit h, so hat man für den Gleichgewichtszustand, da der mittlere Umfang der Schraube $= 2r\pi$ ist,

$$P = \frac{h}{2r\pi} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 95)$$

Für gewöhnlich wirkt aber die Kraft P nicht am Umfange der Schraube, sondern in den meisten Fällen eine andere Kraft P_1 an einem gröfseren Hebelarme AC = R (siehe Fig. 64). Um für diese Kraft P_1 die Formel für den Gleichgewichtszustand aufzustellen, ist zu berücksichtigen, dafs die Kraft P mit dem Momente P . r, die Kraft P_1 dagegen mit dem Momente P_1 . R an der Schraube wirken. Setzt man beide Momente einander gleich, so erhält man:

$$P \cdot r = P_1 \cdot R \text{ und}$$

$$P = \frac{P_1 \cdot R}{r}.$$

Setzt man diesen Wert von P in Formel 95) ein, so folgt:

$$\frac{P_1 \cdot R}{r} = \frac{h}{2r\pi} \cdot Q \text{ oder}$$

$$P_1 \cdot R = \frac{h}{2\pi} \cdot Q \text{ mithin:}$$

$$P_1 = \frac{h}{2R\pi} \cdot Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 96)$$

Beispiele:

1) Eine Schraubenspindel hat 10 cm Durchmesser und 3 cm Steigung; sie wiegt 50 kg und trägt eine Last von 200 kg. Um die Spindel selbst wird eine Schnur geschlungen und diese mit einem Gewichte P belastet. Wie grofs ist das Gewicht zu nehmen, wenn dasselbe das Herabgleiten der Schraubenspindel verhindern soll?

Gegeben sind: $Q = 200 + 50 = 250$ kg,
$r = 5$ cm, $h = 3$ cm.

Nach Formel 95) erhält man:

$$P = \frac{h}{2r\pi} \cdot Q = \frac{3 \cdot 250}{2 \cdot 5 \cdot 3{,}14} = 23{,}88 \text{ kg}.$$

2) An derselben Schraubenspindel läfst man die Kraft an einem Hebel von 0,7 m Länge wirken. Welche Kraft P_1 ist jetzt erforderlich, um den Gleichgewichtszustand herbeizuführen?

Aus Formel 96) folgt:

$$P_1 = \frac{h}{2R\pi} \cdot Q = \frac{3 \cdot 250}{2 \cdot 70 \cdot 3{,}14} = 1{,}7 \text{ kg}.$$

Die Schraube findet in den verschiedenartigsten Anordnungen Verwendung. Am häufigsten dient sie zur Ausübung eines grofsen Druckes, wie z. B. bei den verschiedenen Pressen. Die Last wird hier durch den Widerstand gebildet, welchen der zu pressende Gegenstand dem Zusammendrücken entgegensetzt. Die Richtung, in welcher dieser Widerstand wirkt, kann ganz beliebig sein; die Gröfse des Widerstandes selbst so grofs, dafs das eigene Gewicht der Schraube ganz aufser betracht kommt. Für alle Fälle bleibt die Rechnung jedoch dieselbe, selbst dann, wenn die Spindel festgehalten und die Kraft an der Mutter wirkend gedacht wird.

Für Schrauben von gewöhnlichen Dimensionen nimmt man die Kraft, der Bewegungshindernisse wegen, 2 bis 3 mal so grofs, als die Rechnung ohne Berücksichtigung derselben ergeben würde.

Beispiele:

1) Durch eine Schraubenpresse, deren Spindel eine Steigung von 16 mm besitzt, soll ein Druck von 2500 kg ausgeübt werden. Welche Kraft ist an einem Hebelarme von 1,5 m Länge erforderlich?

Aus Formel 96) folgt:

$$P_1 = \frac{h}{2R\pi} \cdot Q = \frac{0{,}016 \cdot 2500}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}14} = 4{,}246 \text{ kg}.$$

2) An derselben Presse gelangt eine Kraft von 36 kg zur Wirkung. Wie grofs ist der mit dieser Kraft auszuübende Druck?

Aus Gleichung 96): $P_1 = \frac{h}{2R\pi} \cdot Q$ folgt:

$$Q = \frac{2RP_1\pi}{h} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 36 \cdot 3{,}14}{0{,}016} = 21195 \text{ kg}.$$

3) An einem Parallelschraubstocke, dessen Spindel eine Steigung von 8 mm hat, wirkt ein Arbeiter an einem Hebelarme von 300 mm Länge mit einer Kraft von 15 kg. Welchem Drucke ist das eingespannte Arbeitsstück ausgesetzt?

Nach Formel 96) wird:

$$Q = \frac{2RP_1\pi}{h} = \frac{2 \cdot 0{,}3 \cdot 15 \cdot 3{,}14}{0{,}008} = 3532{,}5 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) Welcher Druck kann mit einer Schraubenpresse ausgeübt werden, wenn die Kraft an dem 0,6 m langen Hebelarme zu 16 kg und die Ganghöhe der Spindel zu 12 mm angenommen werden?

Lösung: Q = 5024 kg.

2) Welchen mittleren Durchmesser erhält eine Schraubenspindel von 20 mm Ganghöhe, wenn an deren Umfange durch eine Kraft von 40 kg einer Last von 750 kg das Gleichgewicht gehalten werden soll?

Lösung: d = 119,42 mm.

3) Vermittelst einer Schraube soll ein Druck von 4500 kg ausgeübt werden; die Ganghöhe betrage 13 mm. An welchem Hebelarme mufs eine Kraft von 16 kg wirken, um diesen Druck von 4500 kg hervorzubringen?

Lösung: R = 582,2 mm.

4) Welche Ganghöhe erhält die Spindel einer Schraubenpresse, wenn durch eine Kraft von 20 kg an einem Hebelarme von 800 mm Länge ein Druck von 6000 kg ausgeübt werden soll?

Lösung: h = 16,75 mm.

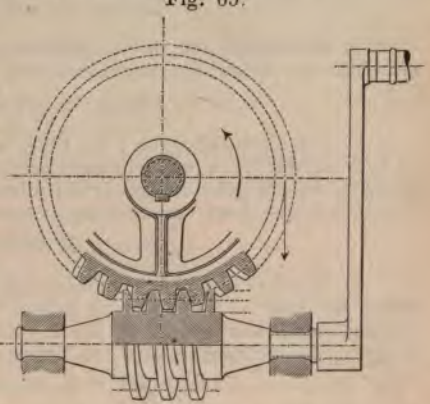
5) Eine Schraube hat einen mittleren Durchmesser von 110 mm und eine Ganghöhe von 26 mm. Die Spindel hat ein Gewicht von 36 kg und trägt eine Last von 500 kg. Wie grofs mufs die am mittleren Spindelumfange nötige Kraft sein, um jenen Gewichten das Gleichgewicht zu halten?

Lösung: P = 40,3 kg.

Schraube ohne Ende.

Die Schraube ohne Ende, auch endlose Schraube oder Schnecke genannt, besteht aus einer mit einigen Schraubengängen versehenen Spindel, deren einzelne Gänge in ein Zahnrad eingreifen, und welche durch eine Kurbel in Bewegung gesetzt wird (Fig. 65). Die Zähne des Rades stehen so geneigt auf dem Radkranze, dafs ihre Richtung der des Schraubengewindes entspricht; letzteres greift in die Zähne des Rades, wie in die Gänge einer Schraubenmutter ein. Eine Seiltrommel ist auf der Welle des Rades aufgekeilt.

Fig. 65.



Der Druck x, welcher zwischen den Schraubengängen und den Radzähnen auftritt, ist für die Schraube als Last, für das Wellrad aber als Kraft zu be-

trachten, und hat man bei einer Kurbellänge R, einer Steigung h, einem Radhalbmesser R_1 und einem Trommelhalbmesser r, für das Gleichgewicht an der Schraubenwelle:

$$P \,.\, 2R\pi = x \,.\, h;$$

für das Gleichgewicht an der Trommelwelle:

$$x \,.\, R_1 = Q \,.\, r.$$

Multipliziert man diese beiden Gleichungen mit einander, so folgt:

$$P \,.\, 2R\pi \,.\, x\, R_1 = x\, h \,.\, Q\, r \text{ oder}$$

$$2R\pi \,.\, R_1 \,.\, P = Q \,.\, h\, r. \text{ Hieraus folgt:}$$

$$P = \frac{Q\, h\, r}{2R\pi R_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 97)$$

$$\text{und} \qquad Q = \frac{2R\pi R_1 P}{h\, r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 98)$$

Bei der Schraube ohne Ende geht aber ein grofser Teil der Wirkung durch die Reibung zwischen den Zähnen und dem Schraubengewinde, und durch Zapfenreibung verloren; der wirkliche Nutzeffekt ist daher nur zu $^1/_4$ bis $^1/_3$ der aus obiger Rechnung hervorgehenden theoretischen Leistung anzunehmen.

Übungsbeispiele:

1) Welche Last kann mit einer Schraube ohne Ende gehoben werden, wenn die Kraft an der 0,4 m langen Kurbel zu 12 kg, der Radhalbmesser zu 0,2 m, der Trommelhalbmesser zu 0,3 m und die Steigung der Schraube zu 0,03 m angenommen werden?

Lösung: $Q = 669{,}86$ kg.

2) Wie grofs ist in vorstehendem Beispiele der Druck, welcher zwischen den Schraubengängen und den Radzähnen auftritt?

Lösung: $x = 1004{,}8$ kg.

3) Bei einer Schraube ohne Ende sind gegeben: der Radhalbmesser = 0,25 m, der Trommelhalbmesser = 0,2 m, die Steigung der Schraube = 0,025 m. Welche Länge erhält die Kurbel, wenn durch eine Kraft von 12 kg eine Last von 1200 kg gehoben werden soll?

Lösung: $R = 318{,}5$ mm.

4) Welche Kraft ist erforderlich, um mit einer Schraube ohne Ende eine Last von 1000 kg zu heben, wenn die Kurbellänge = 0,4 m, der Radhalbmesser = 0,24 m, der Trommelhalbmesser = 0,36 m und die Steigung der Schraube = 0,02 m betragen?

Lösung: $P = 12$ kg (abgerundet).

Vierzehntes Kapitel.

Die Reibung.*)

1. Gleitende Reibung.

Der Bewegungswiderstand, welcher an der Berührungsstelle zweier Körper auftritt, von denen der eine über den anderen fortbewegt wird, heifst Reibung.

Die Reibung ist direkt als Widerstand — Bewegungshindernis — aus dem Grunde aufzufassen, weil sie Bewegungen jeder Art nur hindert oder hemmt, niemals aber Bewegungen erzeugt.

Gleichgültig, in welcher Richtung man einen Körper auf einer wagerechten oder geneigten Ebene fortbewegt, immer wird die Reibung in der Richtung der Bewegung dieser entgegenwirken; sie wird z. B. dem Hinabgleiten eines Körpers auf einer schiefen Ebene ebenso viel hinderlich sein, als dem Hinaufziehen auf derselben.

Um die Reibung möglichst zu vermeiden, bedient man sich der sogenannten Schmiermittel — Öl, Fett, Seife, Graphit — welche zugleich auch von hemmendem Einflusse auf die schnelle Abnützung der reibenden Flächen sind.

Je nachdem die Bewegung des einen Körpers eine gleitende, drehende oder wälzende ist, unterscheidet man gleitende, drehende und wälzende Reibung.

Man unterscheidet auch noch die Reibung der Ruhe, welche zu überwinden ist, wenn ein Körper aus dem Zustande der Ruhe in den der Bewegung überzuführen ist, von der Reibung der Bewegung, welche dieser Bewegung hemmend entgegenwirkt.

Vielfach angestellte Versuche haben zu folgenden Erfahrungssätzen geführt:

1) Die Reibung ist um so geringer, je härter und glatter die Flächen der reibenden Körper sind.

2) Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der reibenden Körper. Diese darf nur nicht so grofs werden, dafs ein Erhitzen eintritt, da hiermit zu gleicher Zeit eine Vergröfserung der Reibung verbunden ist.

3) Die Reibung ist ferner unabhängig von der Gröfse der Berührungsflächen. Die Abnützung dagegen ist um so gröfser, je kleiner unter sonst gleichen Verhältnissen die Berührungsflächen sind. Bei gröfseren Flächen kommen allerdings mehr reibende Teile in betracht; der auf die Flächeneinheit ausgeübte Druck ist dann aber auch in demselben Mafse geringer. Es

*) Über „Arbeit der Reibung“ siehe unter „Mechanische Arbeit.“

ist durchaus gleichgültig, auf welcher seiner 6 Flächen ein Ziegelstein z. B. auf einer wagerechten Ebene bewegt wird; in jedem Falle fällt die Reibung gleich grofs aus.

4) Die Reibung ist direkt proportional dem Normaldrucke, d. i. dem Drucke, welcher rechtwinkelig gegen die sich berührenden Flächen ausgeübt wird. Hat ein Körper das doppelte oder dreifache Gewicht, oder was dasselbe ist, übt er einen doppelt oder dreimal so grofsen Druck aus, so ist auch die Reibung doppelt oder dreimal so grofs, als bei einfachem Drucke.

5) Bei Beginn der Bewegung ist die Reibung gröfser, als während der Bewegung, oder was dasselbe ist: Die Reibung der Ruhe ist gröfser, als die Reibung der Bewegung.

Bezeichnet man die Gröfse der Reibung mit R und den Normaldruck mit N, so nennt man das Verhältnis $\frac{R}{N}$, d. h. das Verhältnis der Reibung zum Normaldruck, den Reibungskoeffizienten.

Der Reibungskoeffizient ist zugleich auch noch diejenige Zahl, welche angiebt, der wievielte Teil einer Last erforderlich ist, um dieselbe fortzubewegen. Bezeichnet man denselben mit f, so ist:

$$f = \frac{R}{N} \quad \ldots \quad (99)$$

mithin: $R = f \,.\, N$ . . . . . (100)

Die Gröfse der Reibung R entspricht zugleich der [illegible] Kraft, welche erforderlich ist, um einen Körper über einen anderen fortzubewegen.

Tabelle der Reibungskoeffizienten f für gleitende Reibung.

Holz	auf Holz, trocken	0,36
„	„ „ geschmiert	0,07
„	„ Metall, trocken	0,42
„	„ „ geschmiert	0,08
Metall	„ „ trocken	0,18
„	„ „ geschmiert	0,07
Gewöhnliche fette Riemen	„ hölzernen Scheiben	0,47
	„ eisernen „	0,28
Hanfseile	„ rauhem Holz	0,50
	„ sehr glattem Holz	0,33

Beispiele:

1) Das Bett einer leerlaufenden Hobelmaschine hat ein Gewicht von 500 kg. Welche Zugkraft ist erforderlich, um dasselbe bei Anwendung von Schmiermaterial in Bewegung zu erhalten?

Nach Formel 100) ist:

$$R = f \,.\, N = 0{,}07 \,.\, 500 = 35 \text{ kg}.$$

2) Wie grofs ist die Reibung eines mit Eisen beschlagenen und mit 1000 kg belasteten Schlittens, welcher sich ohne Anwendung von Schmiermaterial auf einer Holzbahn bewegt?

Aus Formel 100) folgt:

$$R = f \,.\, N = 0{,}42 \,.\, 1000 = 420 \text{ kg.}$$

3) Wie grofs ist der Normaldruck eines Körpers auf eine ebene Bahn, wenn der Reibungswiderstand 500 kg und $f = 0{,}21$ ist?

Aus Formel 100) folgt:

$$N = \frac{R}{f} = \frac{500}{0{,}21} = 2380{,}952 \text{ kg.}$$

4) Auf dem Dampfschieber einer Schiebersteuerung lastet ein Dampfdruck von insgesamt 4000 kg. Welche Kraft ist zur Bewegung des Schiebers erforderlich, wenn $f = 0{,}1$ angenommen wird?

Nach Formel 100) ist:

$$R = f \,.\, N = 0{,}1 \,.\, 4000 = 400 \text{ kg.}$$

5) Der Schieber einer Schiebersteuerung besitzt eine Oberfläche von 150 qcm; der in den Schieberkasten eintretende Dampf eine Spannung von 7 Atmosphären (7 kg pro 1 qcm). Wie grofs ist die Reibung, oder was dasselbe ist, welche Kraft ist zur Bewegung dieses Schiebers erforderlich? ($f = 0{,}12$.)

Den auf den Schieber wirkenden Dampfdruck erhält man, wenn man die Fläche des Schiebers mit dem Dampfdruck multipliziert. Es wird also

$$N = 150 \,.\, 7 = 1050 \text{ kg.}$$

Mithin nach Formel 100):

$$R = f \,.\, N = 0{,}12 \,.\, 1050 = 126 \text{ kg.}$$

6) Wie grofs ist der Reibungskoeffizient, wenn ein Körper von 62,75 kg Gewicht, auf fester Unterlage liegend, durch eine Kraft von 15,25 kg bewegt wird?

Nach Formel 99) erhält man:

$$f = \frac{R}{N} = \frac{15{,}25}{62{,}75} = 0{,}243.$$

7) Ein belasteter Schlitten von 600 kg Gewicht soll auf einer ungeschmierten Holzbahn, welche eine Neigung von 25° besitzt, heraufgezogen werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}4$ gesetzt wird?

Denkt man sich unter Anwendung der bei Besprechung der schiefen Ebene entwickelten Gesetze die Last Q in zwei Komponenten zerlegt, so übt

die Komponente parallel der schiefen Ebene eine Wirkung = 254 kg und
„ „ rechtwinkelig zur „ „ „ „ = 543,5 „

aus. Die durch letztere erzeugte Reibung ist mithin nach Formel 100):

$$R = f \,.\, N = 0{,}4 \,.\, 543{,}5 = 217{,}4 \text{ kg,}$$

folglich die Kraft zum Heraufziehen des Schlittens:

$$P = 254 + 217{,}4 = 471{,}4 \text{ kg.}$$

8) Wie grofs mufs die Kraft sein, welche den Schlitten am Herabgleiten hindert?

Die Reibung unterstützt in diesem Falle die aufgewandte Kraft; es ist daher:

$$P = 254 - 217{,}4 = 36{,}6 \text{ kg.}$$

2) Drehende oder Zapfenreibung.

Drehende oder Zapfenreibung tritt am Umfange cylindrischer Körper — Wellen — auf, welche sich um ihre Achse drehen und von Lagern umschlossen sind.

Die Gröfse der Zapfenreibung an sich, d. h. die Gröfse des am Umfange der Zapfen des rotierenden Körpers auftretenden Widerstandes, wird nach der für gleitende Reibung aufgestellten Formel

$$R = f \cdot N$$

berechnet; jedoch mufs die Einwirkung des Momentes der Zapfenreibung auf den Gleichgewichtszustand in die Rechnung eingeführt werden.

Bezeichnet man entsprechend Fig. 66) mit

N den Normaldruck, mit welchem der Zapfen einer Welle in sein Lager gepreſst wird;

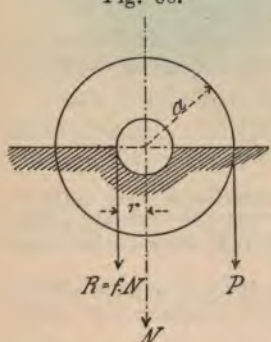
$R = f \cdot N$ die Gröfse der am Umfange des Zapfens thätigen Reibung;

r den Halbmesser des Zapfens;

a den Halbmesser eines auf der Welle sitzenden Rades;

P die am Halbmesser a zur Überwindung der Reibung R erforderliche Kraft,

Fig. 66.



so mufs, da man die Reibung als eine am Umfange des Zapfens der Kraft P entgegengesetzt wirkende Kraft ansehen kann, nach dem über das Rad an der Welle Gesagten

$R \cdot r = P \cdot a$, oder was dasselbe ist:

$f \cdot N \cdot r = P \cdot a$ . . . . . 101)

sein. Hieraus folgt:

$$P = \frac{f \cdot N \cdot r}{a} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 102)$$

und $$R = f \cdot N = \frac{P \cdot a}{r} \quad \ldots\ldots \quad 103)$$

Die letzte Gleichung giebt alsdann entsprechend Fig. 66) auch zugleich noch diejenige Kraft an, welche am Umfange des Zapfens direkt wirken müfste, um die Reibung zu überwinden.

Der Reibungskoeffizient f ist für Zapfenreibung etwas kleiner, als für gleitende Reibung zu nehmen, und zwar ist für Zapfen aus Schmiedeeisen oder Gufseisen, welche sich in Lagern von Gufseisen oder Bronze drehen und mit Öl, Talg oder Fett geschmiert werden, bei ununterbrochener Schmierung $f = 0{,}05$ bis $0{,}06$, bei gewöhnlicher periodischer Schmierung $f = 0{,}07$ bis $0{,}08$ zu setzen.

Beispiele:

1) Ein Rad von $N = 1500$ kg Gewicht und einem Halbmesser von $a = 1{,}5$ m ist in Zapfen von $r = 90$ mm Halbmesser gelagert. Welche Kraft P mufs, um die Zapfenreibung R zu überwinden, am Umfange des Rades thätig sein, wenn $f = 0{,}08$ gesetzt wird?

Nach Formel 102) erhält man:

$$P = \frac{f \,.\, N \,.\, r}{a} = \frac{0{,}08 \,.\, 1500 \,.\, 0{,}09}{1{,}5} = 7{,}2 \text{ kg.}$$

Die Aufgabe liefse sich ohne Formel 102) auch folgendermafsen lösen:

Die Gröfse der Zapfenreibung ist:

$$R = f \,.\, N = 0{,}08 \,.\, 1500 = 120 \text{ kg.}$$

Demnach ist das Reibungsmoment der Zapfen

$$r \,.\, R = 0{,}09 \,.\, 120 = 10{,}8.$$

Das Moment der Kraft ist $= P \,.\, a = P \,.\, 1{,}5$; mithin für den Gleichgewichtszustand:

$$P \,.\, 1{,}5 = 10{,}8 \text{ oder } P = \frac{10{,}8}{1{,}5} = 7{,}2 \text{ kg.}$$

2) Vermittelst einer festen Rolle soll eine Last von $Q = 300$ kg gehoben werden. Die Zapfendurchmesser betragen 40 mm; der Rollendurchmesser ist zu 450 mm angenommen und der Normaldruck zu 375 kg ermittelt worden. Welche Kraft ist unter Berücksichtigung der Zapfenreibung anzuwenden, wenn $f = 0{,}07$ gesetzt wird?

Da hier aufser der Zapfenreibung auch noch eine Last von 300 kg am Rollenhalbmesser mit überwunden werden soll, so ist das Moment dieser Last mit in Rechnung zu stellen. Dasselbe ist $= Q \,.\, a$ und mufs zum Reibungsmoment addiert werden; man erhält deshalb unter Anwendung von Formel 101):

$$P \,.\, a = f \,.\, N \,.\, r + Q \,.\, a \text{ und damit}$$

$$P = \frac{f \,.\, N \,.\, r + Q \,.\, a}{a} = \frac{0{,}07 \,.\, 375 \,.\, 20 + 300 \,.\, 225}{225}.$$

$$P = 302{,}33 \text{ kg.}$$

Ohne Formel läfst sich die Aufgabe wie folgt lösen:

Für die Zapfenreibung erhält man:

$$R = f \,.\, N = 0{,}07 \,.\, 375 = 26{,}25 \text{ kg.}$$

Demnach ist das Moment der Zapfenreibung $= 26{,}25 \,.\, 20 = 525$.

Das Moment der Last ist $= 300 \,.\, 225 = 67500$

und das Moment der Kraft $= 225 \,.\, P$.

Mithin für den Gleichgewichtszustand:

$225 \,.\, P = 67500 + 525$ oder was dasselbe ist:

$$P = \frac{67500 + 525}{225} = 302{,}33 \text{ kg.}$$

3) An der Seiltrommel von 200 mm Durchmesser eines einfachen Haspels hängt eine Last von 500 kg und soll diese durch einen Bremsapparat im Gleichgewicht gehalten werden. Zu diesem Zwecke befindet sich auf der Trommelwelle ein Bremsrad von 900 mm Durchmesser, gegen dessen Umfang ein hölzerner Bremsklotz geprefst wird. Mit welcher Kraft P mufs dieser Bremsklotz angedrückt werden, wenn der Reibungskoeffizient $f = 0{,}42$ gesetzt wird?

Das Moment der Kraft ist $= P \,.\, 450$, mithin

das Moment der Reibung $= P \,.\, 450 \,.\, 0{,}42 = 189 \,.\, P$.

Das Moment der Last ist $= 500 \,.\, 100 = 50000$.

Da diese Momente für den Gleichgewichtszustand gleich sein müssen, folgt:

$$189 \cdot P = 50000 \text{ und}$$

$$P = \frac{50000}{189} = 264{,}55 \text{ kg.}$$

Bei allen Maschinen treten aufser der Zapfenreibung noch andere Bewegungshindernisse auf, als da sind: Reibung in den Zähnen, Widerstände durch die Steifigkeit der Seile, u. s. w. Da alle diese Widerstände sich mit den jeweiligen Verhältnissen ändern, so sind sie äufserst schwer mit ihren richtigen Werten in Rechnung zu stellen. Man verfährt daher gewöhnlich so, dafs man die Kraft, welche man für die ohne Reibung arbeitende Maschine berechnet hat, um einen bestimmten Bruchteil, welcher bei einfachen Maschinen $^1/_{10}$ bis $^1/_6$, bei zusammengesetzten $^1/_6$ bis $^1/_5$ beträgt, erhöht, oder die zu überwindende Last um ebensoviel vermindert.

Übungsbeispiele:

1) Welche Kraft ist erforderlich, um eine Last von 1000 kg auf einer horizontalen Ebene fortzuschleifen? ($f = 0{,}44$.)

Lösung: $R = 440$ kg.

2) Wie grofs ist der Reibungskoeffizient, wenn 2 Körper mit 200 kg gegen einander drücken und die zur Bewegung erforderliche Kraft 30 kg beträgt?

Lösung: $f = 0{,}15$.

3) Wie grofs ist der Druck des Bettes einer Hobelmaschine, wenn die erforderliche Zugkraft 100 kg und der Reibungskoeffizient $f = 0{,}08$ ist?

Lösung: $N = 1250$ kg.

4) Ein Schlitten, welcher mit 400 kg belastet ist, soll auf einer horizontalen, sehr glatten Schneebahn fortgezogen werden. Wie grofs ist die erforderliche Zugkraft? ($f = 0{,}038$.)

Lösung: $R = 15{,}2$ kg.

5) Ein Wasserrad, welches mit seinen 0,3 m starken Zapfen in Lagern von Bronze läuft, besitzt samt Welle und Wasserbelastung ein Gewicht von 18000 kg. Welche Kraft ist am Umfange des Rades erforderlich um die Zapfenreibung zu überwinden, wenn der Radhalbmesser zu 3,6 m und der Reibungskoeffizient zu 0,08 angenommen wird?

Lösung: $P = 60$ kg.

6) Ein senkrecht stehender Schleufsenschieber, gegen welchen ein Wasserdruck von 1000 kg gerichtet ist und dessen Eigengewicht 100 kg beträgt, soll aufgezogen werden. Welche Kraft ist erforderlich:

1) Im Augenblicke, wo die Bewegung beginnt? ($f = 0{,}64$.)
2) Während der Bewegung selbst? ($f = 0{,}31$.)

Lösung: 1) $P = 740$ kg.
2) $P = 410$ kg.

7) Der Schieber einer Schiebersteuerung besitzt eine Oberfläche von 120 qcm und der im Schieberkasten befindliche Dampf eine Spannung von 5 Atmosphären. Wie grofs ist die durch die Excenterstange zu übertragende Kraft, wenn $f = 0{,}15$ gesetzt wird?

Lösung: $R = 90$ kg.

8) Eine Dampfmaschine arbeitet mit 7 Atmosphären Überdruck. Der Dampfschieber ist 30 cm lang und 26 cm breit. Welche Kraft ist zur Bewegung des Schiebers erforderlich, wenn $f = 0{,}11$ gesetzt wird?
Lösung: $R = 600{,}6$ kg.

Fünfzehntes Kapitel.

Zusammengesetzte Riemen- u. Räderwerke.

Denkt man sich auf die beiden Wellen A und B (Fig. 67 und 68) zwei Riemenscheiben von den Durchmessern a und b aufgekeilt und durch einen endlosen Riemen verbunden, so werden die Wellen während der Bewegung bei offenem Riemen, wie in Fig. 67), in gleicher Richtung, dagegen bei gekreuztem Riemen, wie in Fig. 68), in entgegengesetzter Richtung umlaufen. Geht man von der Annahme aus, dafs A die treibende, B die getriebene Welle sei, und bezeichnet man die Anzahl der Umdrehungen der Wellen pro Minute entsprechend mit m und n, so ist die

Fig. 67.

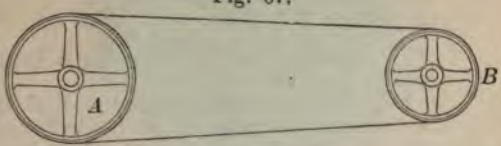
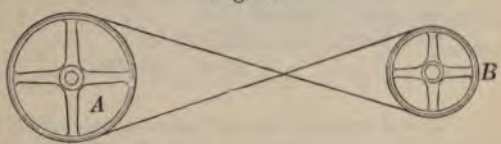


Fig. 68.



Umfangsgeschwindigkeit*) der treibenden Scheibe $= \frac{a \cdot \pi \cdot m}{60}$;

„ „ getriebenen „ $= \frac{b \cdot \pi \cdot n}{60}$.

Diese Umfangsgeschwindigkeiten müssen einander gleich sein, folglich:

$$\frac{a \cdot \pi \cdot m}{60} = \frac{b \cdot \pi \cdot n}{60} \text{ oder was dasselbe ist:}$$

$$a \cdot m = b \cdot n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 104)$$

d. h. das Produkt aus Umlaufszahl und Durchmesser der treibenden Scheibe, ist gleich dem Produkt aus Umlaufszahl und Durchmesser der getriebenen Scheibe.

---

*) Siehe Seite 58.)

Statt der Durchmesser kann man auch die Halbmesser in Rechnung bringen.

Aus Gleichung 104) folgt:

$$a = \frac{b \cdot n}{m} \quad \ldots \quad 105)$$

$$b = \frac{a \cdot m}{n} \quad \ldots \quad 106)$$

$$m = \frac{b \cdot n}{a} \quad \ldots \quad 107)$$

$$n = \frac{a \cdot m}{b} \quad \ldots \quad 108)$$

Beispiele:

1) Eine Ventilatorwelle soll mit 1200 Umdrehungen pro Minute laufen. Auf dieselbe wird eine Riemenscheibe von 0,2 m Durchmesser aufgekeilt und diese durch eine solche von 1,8 m Durchmesser angetrieben. Wie viel Umdrehungen mufs letztere machen?

Aus Formel 107) folgt:

$$m = \frac{b \cdot n}{a} = \frac{0{,}2 \cdot 1200}{1{,}8} = 133{,}3 \text{ Umdrehungen.}$$

2) Eine Turbinenwelle macht 150 Umdrehungen pro Minute und soll eine Transmissionswelle mit 80 Umdrehungen treiben. Auf die Turbinenwelle ist eine Riemenscheibe von 50 cm Halbmesser aufgekeilt; welchen Halbmesser mufs die auf der Transmissionswelle anzubringende Riemenscheibe erhalten?

Aus Formel 106) erhält man:

$$b = \frac{a \cdot m}{n} = \frac{50 \cdot 150}{80} = 93{,}75 \text{ cm.}$$

3) Auf einer Transmissionswelle, welche 100 Umdrehungen pro Minute macht, sitzt eine Riemenscheibe von 60 cm Durchmesser und treibt eine solche von 40 cm Durchmesser auf einer Drehbankspindel. Wie viel Umdrehungen macht die Drehbankspindel?

Nach Formel 108) wird:

$$n = \frac{a \cdot m}{b} = \frac{100 \cdot 60}{40} = 150 \text{ Umdrehungen.}$$

4) Welchen Durchmesser mufs die Riemenscheibe auf der Drehbankspindel erhalten, wenn die letztere 120 Umdrehungen machen soll?

Aus Formel 106) folgt:

$$b = \frac{a \cdot m}{n} = \frac{60 \cdot 100}{120} = 50 \text{ cm.}$$

Die Bewegungsübertragung durch Riemen oder Ketten wird überall da stattfinden, wo die Entfernung der Wellen sehr grofs, die zu übertragende Kraft aber nur klein ist. Sind jedoch bedeutende Kräfte von einer Welle auf eine andere zu übertragen, deren Entfernung nicht zu grofs ist, so werden statt der Riemen oder Ketten Zahnräder angewandt. Diese

bewirken, dafs sich die Wellen in entgegengesetzter Richtung drehen (Fig. 69 und 70).

Fig. 69.

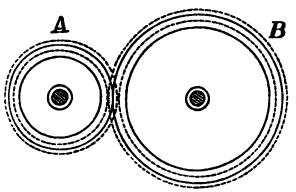
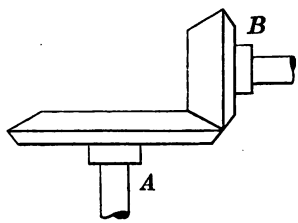


Fig. 70.



Die ineinander greifenden Räder müssen ebenfalls wieder gleiche Umfangsgeschwindigkeiten haben; es gelangt mithin auch hier die Gleichung

$$a \cdot m = b \cdot n$$

zur Anwendung, und kann man dann mit a und b nicht nur die Halb- oder Durchmesser, sondern auch die Zähnezahlen der Räder bezeichnen.

Auch hier gilt entsprechend das Gesetz:

Das Produkt aus der Umlaufszahl der treibenden Welle und der Zähnezahl des treibenden Rades, ist gleich dem Produkt aus der Umlaufszahl der getriebenen Welle und der Zähnezahl des getriebenen Rades.

Beispiele:

1) Auf einer mit 30 Umdrehungen laufenden Wasserradwelle sitzt ein konisches Rad mit 130 Zähnen, welches in ein auf einer Mühlspindel sitzendes Trieb mit 40 Zähnen eingreift. Wieviel Umdrehungen macht die Mühlspindel?

Aus Formel 108) folgt:

$$n = \frac{a \cdot m}{b} = \frac{30 \cdot 130}{40} = 97{,}5 \text{ Umdrehungen.}$$

2) Durch einen Pferdegöpel, dessen Welle sich in 5 Minuten 8 mal umdreht, soll eine zweite Welle mit 16 Umdrehungen pro Minute bewegt werden. Auf letzterer bringt man ein Trieb mit 30 Zähnen an; wieviel Zähne mufs das Rad auf der Göpelwelle erhalten?

Aus Formel 105) folgt:

$$a = \frac{b \cdot n}{m} = \frac{30 \cdot 16}{\frac{8}{5}} = 300 \text{ Zähne.}$$

Die Rechnung bleibt dieselbe, wenn zwischen treibendem und getriebenem Rade mehrere Zwischenräder in der aus (Fig. 71) ersichtlichen Anordnung eingeschaltet werden, d. h. es wird bei der Berechnung auf diese Zwischen- oder Transporträder gar keine Rücksicht genommen.

Erfolgt die Bewegung der getriebenen Welle B durch die treibende Welle A vermittelst sogenannter Vorgelege ÷ Räder, welche zu je zweien auf einer Zwischenwelle sitzen (siehe Fig. 72 und 73) ÷ so findet man die Beziehungen der hierbei in Frage kommenden Gröfsen, wenn man berücksichtigt, dafs immer je 2 in einander greifende Räder oder durch Riemen verbundene Scheiben gleiche Umfangsgeschwindigkeiten besitzen, je zwei auf einer Welle sitzende Räder oder Scheiben hingegen gleich viel Umdrehungen machen müssen.

Fig. 71.

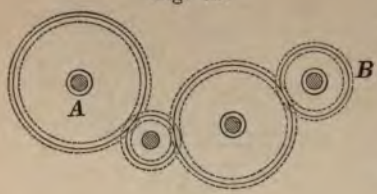
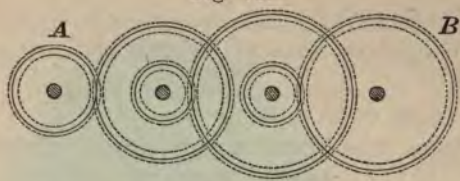
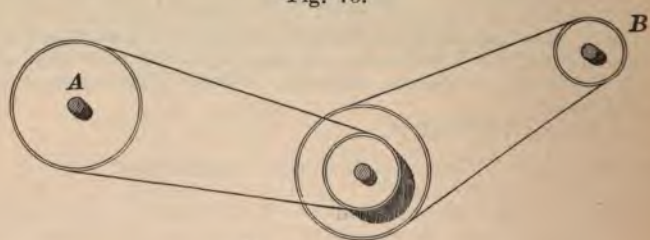


Fig. 72.



Bezeichnet man die Durchmesser oder Zähnezahlen der treibenden Räder mit D, D_1, D_2; die Durchmesser oder Zähnezahlen der getriebenen Räder mit d, d_1, d_2; die Umdrehungszahlen der treibenden und getriebenen Welle mit m und n, und die Umdrehungszahlen der Vorgelege oder Zwischenwellen mit x und y, so folgt entsprechend Gleichung 104):

Fig. 73.



$$D \cdot m = d \cdot x,$$
$$D_1 \cdot x = d_1 \cdot y,$$
$$D_2 \cdot y = d_2 \cdot n.$$

Durch Multiplikation dieser drei Gleichungen erhält man:

$$*) D \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot m = d \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot n \quad \ldots\ldots\ldots \quad 109)$$

Ist wie in Fig. 73) nur eine Vorgelegewelle vorhanden, so folgt entsprechend Gleichung 109) für das Umsetzungsverhältnis:

$$D \cdot D_1 \cdot m = d \cdot d_1 \cdot n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 110)$$

*) Vergl. Seite 26 unter 31, c).

d. h. das Produkt aus den Durchmessern oder Zähnezahlen aller treibenden Räder und der Umdrehungszahl der treibenden Welle, ist gleich dem Produkt aus den Durchmessern oder Zähnezahlen der getriebenen Räder und der Umdrehungszahl der getriebenen Welle.

Aus Gleichung 109) ergiebt sich dann z. B. weiter:

$$D = \frac{d \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot n}{D_1 \cdot D_2 \cdot m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 111)$$

$$n = \frac{D \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot m}{d \cdot d_1 \cdot d_2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 112)$$

u. s. w.

und aus Gleichung 110) z. B.:

$$D_1 = \frac{d \cdot d_1 \cdot n}{D \cdot m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 113)$$

$$d = \frac{D \cdot D_1 \cdot m}{d_1 \cdot n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 114)$$

u. s. w.

Beispiele:

1) Ein zum Betriebe einer Mühlspindel dienendes Wasserrad macht 10 Umdrehungen pro Minute. Die Welle desselben trägt ein Rad mit 130 Zähnen, welches in ein auf der Vorgelegewelle sitzendes Trieb mit 40 Zähnen eingreift. Auf der Welle dieses Triebes sitzt ein konisches Rad mit 110 Zähnen, welches ein Trieb mit 30 Zähnen auf der Mühlspindel treibt. Wieviel Umdrehungen macht die Mühlspindel?

Aus Formel 110) folgt:

$$n = \frac{D \cdot D_1 \cdot m}{d \cdot d_1} = \frac{130 \cdot 110 \cdot 10}{40 \cdot 30} = 119{,}2 \text{ Umdrehungen.}$$

2) Auf einer Transmissionswelle, welche 120 Umdrehungen macht und eine Drehbank treiben soll, sitzt eine Riemenscheibe von 40 cm Durchmesser und treibt von hier aus eine auf einer Vorgelegewelle befindliche Riemenscheibe von 34 cm Durchmesser. Auf der Vorgelegewelle sitzt eine zweite Riemenscheibe von 46 cm Durchmesser, von welcher die 26 cm im Durchmesser haltende Riemenscheibe der Drehbankspindel angetrieben wird. Wieviel Umdrehungen macht die Drehbankspindel?

Nach Formel 110) erhält man:

$$n = \frac{D \cdot D_1 \cdot m}{d \cdot d_1} = \frac{40 \cdot 46 \cdot 120}{34 \cdot 26} = 250 \text{ Umdrehungen.}$$

3) Von der mit 320 Umdrehungen laufenden Welle A (Fig. 72) soll die Welle B mit 20 Umdrehungen bewegt werden. Von den hierzu erforderlichen 6 Rädern sind 5 vorhanden und für diese folgende Zähnezahlen gegeben:

$$D = 45,\ D_1 = 36,\ D_2 = 48,\ d = 90,\ d_1 = 128.$$

Welche Zähnezahl mufs das auf der Welle B aufzukeilende Rad d_2 erhalten?

Nach Formel 109) wird:

$$d_2 = \frac{D \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot m}{d \cdot d_1 \cdot n} = \frac{45 \cdot 36 \cdot 48 \cdot 320}{90 \cdot 128 \cdot 20} = 108 \text{ Zähne.}$$

4) Die Kurbelwelle einer Dampfmaschine macht 40 Umdrehungen pro Minute; man will vermittelst eines doppelten Vorgeleges die auf einer anderen Welle sitzende Kreissäge mit 320 Umdrehungen treiben. Die Riemenscheibe auf der Welle der Kreissäge habe 24 cm Durchmesser; der Durchmesser der beiden ersten treibenden Scheiben sei je 64 cm, die Durchmesser der von ihnen getriebenen Scheiben 34 cm und 30 cm. Welchen Durchmesser mufs die letzte treibende Scheibe erhalten?

Gegeben sind: $m = 40$, $n = 320$;
$D = 64$, $D_1 = 64$, $d = 34$, $d_1 = 30$, $d_2 = 24$.

Folglich nach Formel 109):

$$D_2 = \frac{d \cdot d_1 \cdot d_2 \cdot n}{D \cdot D_1 \cdot m} = \frac{34 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 320}{64 \cdot 64 \cdot 40} = 47{,}8 \text{ cm}.$$

Wird die Bewegung einer Welle durch Riemen- und Räderwerk auf eine andere Welle übertragen, so kann man Formel 109) ebenfalls zur Berechnung benützen, indem man entweder sowohl die Riemenscheiben als auch die Räder mit ihren Halb- oder Durchmessern, oder nur die Riemenscheiben mit ihren Halb- oder Durchmessern und die Räder mit ihren Zähnezahlen in Rechnung bringt.

Beispiel.

Die Spindel einer Drehbank, auf welcher sich eine Riemenscheibe von 36 cm Durchmesser befindet, wird durch eine Transmissionswelle, die 120 Umdrehungen macht, und auf welcher sich eine Riemenscheibe von 40 cm Durchmesser befindet, angetrieben. Durch 2 Räder mit je 60 Zähnen und 2 Triebe von je 20 Zähnen wird die Bewegung auf die Drehbankspindel übertragen. Wieviel Umdrehungen macht die Spindel?

Gegeben sind: $m = 120$, $D = 40$, $D_1 = 20$, $D_2 = 20$;
$d = 36$, $d_1 = 60$, $d_2 = 60$.

Aus Formel 112) ergiebt sich:

$$n = \frac{D \cdot D_1 \cdot D_2 \cdot m}{d \cdot d_1 \cdot d_2} = \frac{40 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 120}{56 \cdot 60 \cdot 60} = 14{,}8 \text{ Umdrehungen}.$$

Wird die Umdrehung einer Welle durch die in Fig. 65) dargestellte Schraube ohne Ende bewirkt, so ist zu beachten, dafs die Schraube als ein Trieb mit einem Zahne in Rechnung zu bringen ist, wenn sie eingängig, hingegen als ein Trieb mit 2 oder 3 Zähnen, wenn sie zwei- oder dreigängig ist.

Beispiele:

1) Wie hoch wird eine an einer Seiltrommel von $d = 30$ cm Durchmesser hängende Last bei 126 Kurbelumdrehungen gehoben, wenn das Rad 90 Zähne hat und die Schraube eingängig ist?

Die Trommelwelle macht bei 126 Kurbelumdrehungen

$$126 \cdot {}^1/_{90} = 1{,}4 \text{ Umdrehungen};$$

demnach hebt sich die Last um

$$1{,}4 \cdot d \cdot \pi = 1{,}4 \cdot 30 \cdot 3{,}14 = 132 \text{ cm}.$$

2) Bei einer durch Schnecke und Schneckenrad getriebenen Windenvorrichtung beträgt der Trommel-Durchmesser $d = 36$ cm. Das Schnecken-

rad hat 110 Zähne; die Schnecke ist dreigängig. Wie hoch wird eine an der Seiltrommel hängende Last bei 80 Kurbelumdrehungen gehoben?

Bei 80 Umdrehungen der Kurbel macht die Trommelwelle

$$80 \,.\, {}^{3}/_{110} = 2{,}18 \text{ Umdrehungen,}$$

die Last hebt sich mithin um

$$2{,}18 \,.\, d \,.\, \pi = 2{,}18 \,.\, 36 \,.\, 3{,}14 = 246{,}63 \text{ cm.}$$

3) Es soll der Durchmesser der Windentrommel einer durch Schnecke und Schneckenrad getriebenen Windenvorrichtung bestimmt werden, wenn die Schnecke zweigängig ist, das Schneckenrad 130 Zähne hat und die Last bei 60 Umdrehungen der Kurbel um 150 cm gehoben werden soll.

Bei 60 Umdrehungen der Kurbel macht die Trommelwelle

$$60 \,.\, \frac{2}{130} = 0{,}923 \text{ Umdrehungen.}$$

Da die Last um 150 cm gehoben werden soll, muſs

$$150 = 0{,}923 \,.\, \pi \,.\, d \text{ sein;}$$

hieraus erhält man als Durchmesser:

$$d = \frac{150}{0{,}923 \,.\, 3{,}14} = 50 \text{ cm (abgerundet).}$$

Übungsbeispiele:

1) Auf einer Drehbankspindel, welche 180 Umdrehungen pro Minute machen soll, sitzt eine Riemenscheibe von 30 cm Durchmesser. Diese soll durch eine Transmissionswelle, welche 80 Umdrehungen pro Minute macht, angetrieben werden. Welchen Durchmesser muſs die auf der Transmissionswelle anzubringende Riemenscheibe erhalten?

Lösung: $D = 67{,}5$ cm.

2) Auf einer Wasserradwelle sitzt ein konisches Rad mit 120 Zähnen, welches in ein auf einer Mühlspindel sitzendes Trieb mit 30 Zähnen eingreift. Die Mühlspindel soll 100 Umdrehungen pro Minute machen. Wie viel Umdrehungen muſs die Wasserradwelle machen?

Lösung: $m = 25$ Umdrehungen.

3) Eine Welle für eine Holzhobelmaschine soll mit 600 Umdrehungen pro Minute laufen. Auf dieselbe wird eine Riemenscheibe von 0,15 m Durchmesser aufgekeilt. Wie viel Umdrehungen muſs die Transmissionswelle machen, wenn die auf derselben befindliche Riemenscheibe einen Durchmesser von 1,5 m hat?

Lösung: $m = 60$ Umdrehungen.

4) Eine Wasserradwelle macht 12 Umdrehungen pro Minute; die Arbeitswelle, welche 120 Umdrehungen pro Minute machen soll, wird durch ein doppeltes Vorgelege angetrieben. Das Rad auf der Wasserradwelle habe 100 Zähne, das Getriebe auf der Vorgelegewelle 20 Zähne und das treibende Rad auf der Vorgelegewelle 60 Zähne. Welche Zähnezahl erhält das Getriebe auf der Arbeitswelle?

Lösung: $d_1 = 30$ Zähne.

5) Durch eine mit 30 Umdrehungen pro Minute laufende Betriebswelle soll vermittelst eines dreifachen Vorgeleges eine Arbeitswelle mit 300 Umdrehungen pro Minute angetrieben werden. Auf der Arbeitswelle sitzt eine Riemenscheibe von 24 cm Durchmesser. Die Durchmesser der treibenden Scheiben auf den Vorgelegewellen betragen 64

und 56,25 cm und diejenigen der getriebenen Scheiben 32 und 30 cm. Welchen Durchmesser erhält die treibende Scheibe auf der Betriebswelle?

Lösung: D = 64 cm.

Sechzehntes Kapitel.

Der Schwerpunkt.*)

Jeden Körper kann man sich aus einer Reihe einzelner Körperteilchen bestehend denken. Jedes dieser einzelnen Körperteilchen besitzt ein bestimmtes Gewicht und die Gewichte aller dieser Teilchen bilden eine Reihe von parallel und senkrecht nach unten gerichteten Kräften, deren Mittelkraft**) das Gewicht des ganzen Körpers bildet.

Den Angriffspunkt dieser Mittelkraft, in welchem also das ganze Gewicht des Körpers vereinigt ist, nennt man den Schwerpunkt des Körpers.

Der Schwerpunkt eines und desselben Körpers behält innerhalb des Körpers stets seine Lage bei, man mag den Körper drehen und wenden wie man will. Wird der Schwerpunkt eines Körpers auf irgend eine Weise unterstützt oder festgehalten, so bleibt der Körper in Ruhe, denn die einzelnen Körperteilchen sind ja dann in Bezug auf ihr Gewicht in dem Schwerpunkt vereinigt zu denken. Man sagt deshalb:

Der Schwerpunkt eines Körpers ist derjenige Punkt, in welchem derselbe unterstützt oder festgehalten werden mufs, damit er in jeder Lage im Gleichgewicht bleibt.

Über die Lage des Schwerpunktes bei Linien, Flächen und Körpern giebt die im Anhange des Buches befindliche Tabelle Aufschlufs; allgemein zu bemerken ist folgendes:

Der Schwerpunkt gerader Linien liegt in der Mitte der Länge derselben. Hierher gehören gerade Flach-, Rund- oder Profil-Eisenstangen.

Der Schwerpunkt regelmäfsiger Flächen liegt im Mittelpunkte derselben. Hierher gehören Flächen von der Form des Kreises, Quadrates, Rechtecks, regelmäfsigen Vielecks u. s. w. Als Flächen lassen sich in diesem Sinne auch alle jene Körper behandeln, bei welchen die Dicke gegenüber der Breite und Länge sehr gering ist; z. B. Blechtafeln, Steinplatten, Bretter u. s. w.

---

*) Siehe Anhang; Tabelle.

**) Vergl. Kapitel VI, Seite 75.)

Bei regelmäfsigen Körpern — Würfel, Kugel — liegt der Schwerpunkt stets im Mittelpunkte derselben, wobei hier sowohl, als bei dem Vorstehenden angenommen ist, dafs die Teile, deren Schwerpunktslage bestimmt werden soll, aus dem gleichen Material bestehen.

Bei manchen Körpern, z. B. Ringen, Hohlcylindern, Hohlkugeln, fällt der Schwerpunkt aufserhalb der Mafse des Körpers. Soll ein solcher Körper in seinem Schwerpunkte unterstützt werden, so wird es notwendig, den Körper mit einem zweiten so zu verbinden, dafs die Schwerpunkte beider Körper zusammenfallen.

Guldin'sche Regel.

Eine sehr nützliche und praktische Anwendung findet die Lehre vom Schwerpunkte bei der Berechnung von Oberflächen und Inhalten gewisser Körper.

Dreht sich eine gerade oder eine krumme Linie um eine fest stehende Achse, welche mit ihr in einer Ebene liegt, so erzeugt diese Linie eine Fläche, eine sogenannte Rotationsfläche.

Dreht sich eine Fläche um eine feststehende Achse, welche mit ihr in einer Ebene liegt, so erzeugt diese Fläche einen Körper, einen sogenannten Rotationskörper.

Nach der Guldin'schen Regel findet man nun

die Gröfse der Oberfläche eines Rotationskörpers, wenn man die Länge der diese Oberfläche erzeugenden Linie mit dem Wege, welchen ihr Schwerpunkt bei der Drehung durchläuft, multipliziert; und

die Gröfse des Rauminhaltes eines Rotationskörpers, wenn man den Inhalt der den Körper erzeugenden Fläche mit dem Wege, welchen ihr Schwerpunkt bei der Drehung durchläuft, multipliziert.

Es soll in Folgendem nur angenommen werden, dafs die Schwerpunkte der sich drehenden Linien oder Flächen Kreise beschreiben. Bezeichnet man mit

l die Länge der erzeugenden Linie;
F den Flächeninhalt der erzeugenden Fläche;
O die Oberfläche eines Körpers;
I den Rauminhalt eines Körpers;
r den Halbmesser des vom Schwerpunkte durchlaufenen Kreises,

so erhält man allgemein die Gröfse der erzeugten Oberfläche

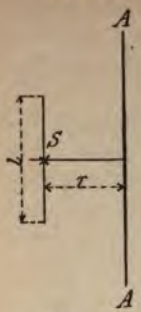
$$O = 2\pi r \,.\, l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 115)$$

und die Gröfse des Rauminhaltes des erzeugten Körpers

$$I = 2\pi r \,.\, F \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 116)$$

Beispiele:

Fig. 74.



1) Oberfläche — Mantel — des geraden Cylinders.*)

Dieselbe entsteht, wenn sich eine gerade Linie um eine feste Achse AA dreht. (Fig. 74). Es ist alsdann:

Weg des Schwerpunktes $= 2\pi r$.

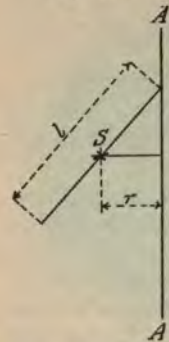
Länge der Erzeugenden $= l$; folglich:

Oberfläche des Cylindermantels $= 2\pi r . l$.

Macht man $l = 500$ mm und $r = 200$ mm, so erhält man:

$$O = 2\pi r . l = 2 . 3{,}14 . 200 . 500 = 628000 \text{ qmm}.$$

Fig. 75.



2) Oberfläche des Kegels.*)

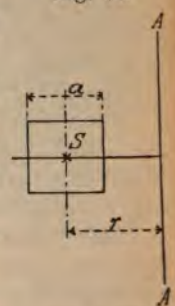
Gegeben sei eine gegen die feste Achse AA geneigte gerade Linie l, welche mit einem ihrer Endpunkte in die Achse AA fällt. (Fig. 75). Es folgt dann nach Formel 115):

$$O = 2\pi r . l.$$

Setzt man $l = 0{,}5$ m und $r = 0{,}2$ m, so wird:

$$O = 2\pi r . l = 2 . 3{,}14 . 0{,}2 . 0{,}5 = 0{,}628 \text{ qm}.$$

Fig. 76.



3) Oberfläche eines Ringes von quadratischem Querschnitt.*)

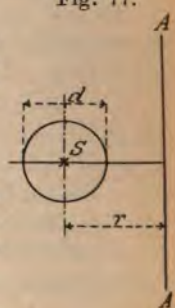
Zur Erzeugung dieser Oberfläche mufs sich ein Quadrat von der Seite a um die Achse AA drehen. Die Länge der erzeugenden Linie ist hier gleich dem Umfange des Quadrates, also $= 4a$ (Fig. 76), mithin nach Formel 115):

$$O = 2\pi r . l = 2\pi r . 4a = 8\pi r a.$$

Setzt man $a = 0{,}5$ dcm und $r = 3$ dcm, so wird:

$$O = 8\pi r a = 8 . 3{,}14 . 3 . 0{,}5 = 37{,}68 \text{ qdcm}.$$

Fig. 77.



4) Oberfläche eines Ringes von kreisförmigem Querschnitt.*)

Um diese Oberfläche zu erzeugen, mufs sich eine Kreislinie um die Achse AA drehen. (Fig. 77). Nach Formel 115) wird demnach, wenn man den Durchmesser der Kreislinie mit d bezeichnet:

$$O = 2\pi r . l = 2\pi r . \pi d = 2\pi^2 d r.$$

Setzt man $r = 30$ cm und $d = 10$ cm, so folgt:

$$O = 2\pi^2 d r = 2 . 3{,}14 . 3{,}14 . 10 . 30 = 5915{,}76 \text{ qcm}.$$

Soll für die in Beispiel 3 und 4) gegebenen Kreisringe noch der Rauminhalt berechnet werden, so mufs im ersten Falle eine quadratische Fläche und im zweiten Falle eine Kreisfläche rotieren.

---

*) Die Werte in den Beispielen 1—4 sind mit $\pi = 3{,}14$ durchgerechnet; es wird sich natürlich empfehlen die am Ende des Buches befindliche Tabelle über die Kreis-Inhalte und -Umfänge zu benützen.

5) Inhalt des Kreisringes mit quadratischem Querschnitt. (Fig. 76.)

Nach Formel 116) ergiebt sich:

$$I = 2\pi r . F = 2\pi r . a^2.$$

Setzt man $r = 0{,}5$ m und $a = 0{,}15$ m, so folgt unter Anwendung der Tabelle im Anhange:

$$I = 2\pi r . a^2 = 3{,}142 . 0{,}0225 = 0{,}071 \text{ cbm}.$$

6) Inhalt des Kreisringes mit kreisförmigem Querschnitt. (Fig. 77.)

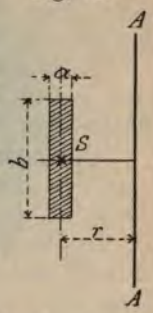
Nach Formel 116) erhält man:

$$I = 2\pi r . F = 2\pi r . \frac{\pi d^2}{4}.$$

Setzt man $r = 2$ dcm und $d = 0{,}8$ dcm, so folgt laut Tabelle:

$$I = 2\pi r . \frac{\pi d^2}{4} = 12{,}57 . 0{,}503 = 6{,}323 \text{ cdcm}.$$

7) Oberfläche und Inhalt des geraden Hohlcylinders. Fig. 78.



Zur Erzeugung der Oberfläche und des Inhaltes mufs ein Rechteck von den Seiten a und b um die Achse AA rotieren. (Fig. 78.) Der Umfang der die Oberfläche erzeugenden Geraden ist $l = 2a + 2b = 2(a + b)$; der Inhalt der erzeugenden Fläche $F = a . b$, mithin nach Formel 115):

$$O = 2\pi r . l = 2\pi r . 2(a + b)$$

und nach Formel 116):

$$I = 2\pi r . F = 2\pi r . ab.$$

Setzt man $a = 5$ cm, $b = 60$ cm und $r = 30$ cm, so folgt:

$$O = 2\pi r . 2(a + b) = 188{,}5 . 2 . 65 = 24505 \text{ qcm}.$$
$$I = 2\pi r . ab = 188{,}5 . 5 . 60 = 56550 \text{ ccm}.$$

Eine weitere Berücksichtigung erfahren die vorstehenden Regeln im folgenden Kapitel unter Gewichtsberechnungen.

Siebzehntes Kapitel.

Spezifisches Gewicht, absolutes Gewicht und Gewichtsberechnungen.

Unter dem spezifischen Gewichte eines Körpers versteht man das Gewicht einer Volumen*)-Einheit, d. i. eines Kubikcentimeters oder eines Kubikdecimeters, des Körpers.

Man sagt auch: Das spezifische Gewicht eines Körpers ist gleich dem Gewichte eines Kubikcentimeters**) desselben in Gramm, oder:

---

*) Volumen = Rauminhalt.

**) Ist das Gewicht von
1 cdcm = s kg, so wird das Gewicht von
1 cbm = s . 1000 kg, von

$$1 \text{ ccm} = \frac{s}{1000} \text{ kg und von}$$

$$1 \text{ cmm} = \frac{s}{1000000} \text{ kg}.$$

Das spezifische Gewicht eines Körpers ist gleich dem Gewichte eines Kubikdecimeters desselben in Kilogramm ausgedrückt.

Da die spezifischen Gewichte gewöhnlich auf Wasser bezogen sind, so sagt man auch noch: Das spezifische Gewicht eines Körpers giebt an, wievielmal der Körper schwerer ist, als das Gewicht einer Wassermasse, welche genau denselben Rauminhalt besitzt, wie der Körper selbst.

Aufschluſs über die spezifischen Gewichte der verschiedenen Materialien giebt die Tabelle im Anhange des Buches; es sind hier die Gewichte eines Kubikdecimeters, oder was dasselbe ist, eines Liters, in Kilogramm angegeben.

Unter dem absoluten Gewichte eines Körpers, versteht man das Gewicht des gesamten Materiales, welches den ganzen Rauminhalt des Körpers ausfüllt.

Man erhält das absolute Gewicht eines Körpers, wenn man seinen Rauminhalt mit dem spezifischen Gewichte des Materiales, aus welchem der Körper besteht, multipliziert.

Bezeichnet man mit

s das spezifische Gewicht
I den Rauminhalt (Volumen) } eines Körpers,
G das absolute Gewicht

so wird sein absolutes Gewicht

$$G = I \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 117)$$

Hieraus folgt:

$$I = \frac{G}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 118)$$

$$s = \frac{G}{I} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 119)$$

Es wird sich nach dem Vorstehenden empfehlen, bei Gewichtsberechnungen von Körpern die Abmessungen derselben stets in **Decimetern** in die Rechnung einzuführen, da die spezifischen Gewichte in Kilogramm gegeben sind. Das Gewicht der Körper wird dann ohne weiteres in **Kilogramm** erhalten.

Da gewöhnlich nur die Rauminhalte einfacher geometrischer Körper allgemein bekannt sind, so wird es notwendig, Körper von komplizierten Formen auf solche von möglichst einfachen Formen zurückzuführen.

In der Regel verfährt man so, daſs man jeden Körper in eine Reihe einfacher Körper, deren Rauminhalte infolge ihrer richtigen oder angenäherten geometrischen Form bekannt sind, zerlegt, deren Gewichte berechnet und diese dann zum Gesamtgewichte des Körpers zusammenaddiert.

Beispiele:

1) Wie grofs ist das Gewicht einer gufseisernen Kugel, welche 12 cdcm Rauminhalt besitzt?

Das spezifische Gewicht des Gufseisens ist nach der Tabelle = 7,25; mithin nach Formel 117):

$$G = I \,.\, s = 12 \,.\, 7{,}25 = 87{,}0 \text{ kg}.$$

2) Wieviel kg wiegt eine Rundeisenstange von 50 mm Durchmesser und 1200 mm Länge?*)

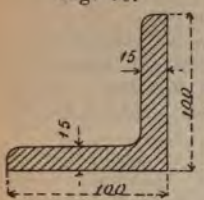
Die Stange ist als Cylinder von 0,5 dcm Durchmesser und 12 dcm Länge aufzufassen; der Rauminhalt ist somit:

$$I = \pi r^2 \,.\, h = 0{,}1964 \,.\, 12 = 2{,}357 \text{ cdcm}.$$

Nimmt man nach der Tabelle das spezifische Gewicht des Schmiedeeisens zu 7,78 an, so folgt nach Formel 117):

$$G = I \,.\, s = 2{,}357 \,.\, 7{,}78 = 18{,}337 \text{ kg}.$$

Fig. 79.



3) Wie grofs ist das Gewicht eines Winkeleisens nach nebenstehender Fig. 79), wenn die Länge desselben = 5 m ist?**)

Sieht man von den Abrundungen des Profiles ab, so kann man das Winkeleisen bestehend denken aus 2 Rechtecken von den Flächeninhalten

$$f_1 = 1 \,.\, 0{,}15 = 0{,}15 \text{ qdcm und}$$
$$f_2 = 0{,}85 \,.\, 0{,}15 = 0{,}1275 \text{ qdcm}.$$

$$\text{Mithin } F = f_1 + f_2 = 0{,}2775 \text{ qdcm}.$$

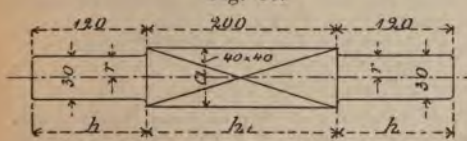
Folglich: Rauminhalt = Fläche mal Länge, d . i.

$$I = F \,.\, l = 0{,}2775 \,.\, 50 = 13{,}875 \text{ cdcm}$$

und damit, wenn s = 7,78 gesetzt wird, nach Formel 117):

$$G = I \,.\, s = 13{,}875 \,.\, 7{,}78 = 107{,}948 \text{ kg}.$$

Fig. 80.



4) Wieviel kg wiegt die in Fig. 80) gegebene Messingstange, wenn s = 8,55 angenommen wird?

Die Stange ist als aus 2 Cylindern und einem Prisma bestehend aufzufassen. Der Rauminhalt eines Cylinders ist $= \pi r^2 \,.\, h$; derjenige des Prismas von quadratischem Querschnitt $= a^2 \,.\, h_1$, mithin der Rauminhalt der ganzen Stange

$$I = 2 \,.\, \pi r^2 \,.\, h + a^2 \,.\, h_1 = 2 \,.\, 0{,}071 \,.\, 1{,}2 + 0{,}4 \,.\, 0{,}4 \,.\, 2.$$
$$I = 0{,}170 + 0{,}32 = 0{,}490 \text{ cdcm}.$$

Damit ergiebt sich nach Formel 117):

$$G = I \,.\, s = 0{,}490 \,.\, 8{,}55 = 4{,}189 \text{ kg}.$$

5) Wie grofs ist das Gewicht einer Granitplatte von 1500 mm Länge, 800 mm Breite und 70 mm Stärke, wenn sich in derselben ein Loch von 200 mm Länge und 100 mm Breite befindet? (s = 2,8.)

Der Rauminhalt der Platte berechnet sich aus dem Gesammtinhalt derselben, verringert um den Rauminhalt der Öffnung; demnach wird

$$I = 15 \,.\, 8 \,.\, 0{,}7 - 2 \,.\, 1 \,.\, 0{,}7 = (15 \,.\, 8 - 2 \,.\, 1)\, 0{,}7 = 82{,}6 \text{ cdcm}.$$

Hieraus folgt nach Formel 117):

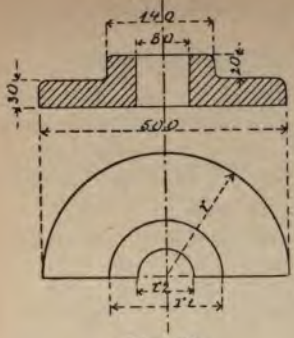
$$G = I \,.\, s = 82{,}6 \,.\, 2{,}8 = 231{,}28 \text{ kg}.$$

---

*) Für die folgenden Gewichtsberechnungen sind die Tabellen am Ende des Buches benützt.

**) Sämtliche Mafse in den folgenden Figuren sind in Millimetern angegeben.

Fig. 81.



6) Wieviel kg wiegt die in Fig. 81) gegebene Gufseisenplatte? (s = 7,3.)

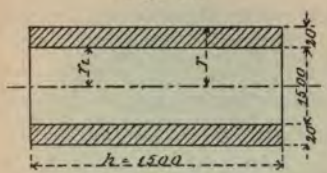
Bezeichnet man die Höhe der eigentlichen Platte mit h und die Höhe des Auges mit h_1, so ist der für das Gewicht nutzbare Rauminhalt der Platte gleich dem der vollen Platte, vermehrt um denjenigen des Auges und vermindert um denjenigen des Loches; d. h.

$$I = \pi r^2 . h + \pi r_1^2 . h_1 - \pi r_2^2 (h + h_1).$$
$$= 19{,}635 . 0{,}3 + 1{,}539 . 0{,}2 - 0{,}503 . 0{,}5.$$
$$= 5{,}891 + 0{,}308 - 0{,}252 = 5{,}947 \text{ cdcm.}$$

Mithin nach Formel 117):

$$G = I . s = 5{,}947 . 7{,}3 = 43{,}413 \text{ kg.}$$

Fig. 82.



7) Wie grofs ist das Gewicht eines Kesselbleches von 1500 mm Länge und 20 mm Stärke, wenn dasselbe zu einem Kessel von 1500 mm lichtem Durchmesser gehört? (s = 7,8.)

Der Rauminhalt des Bleches, welcher durch die Wandung eines Hohlcylinders gebildet wird, kann auf zweierlei Weise gefunden werden. Einmal nach der Guldin'schen Regel (Seite 137, Beispiel 7) und das andere mal aus der Differenz der beiden Cylinder von den Halbmessern r und r_1 (Fig. 82), also:

$$I = \pi r^2 . h - \pi r_1^2 . h = (\pi r^2 - \pi r_1^2) h.$$

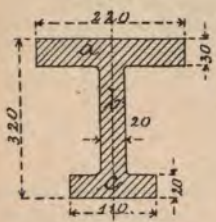
Der Halbmesser r wird nach Fig. 82) = 770 mm, mithin in Decimetern:

$$I = 186{,}3 . 15 - 176{,}7 . 15 = (186{,}3 - 176{,}7) 15 = 144{,}0 \text{ cdcm.}$$

Entsprechend Formel 117) ergiebt sich nun:

$$G = I . s = 144 . 7{,}8 = 1123{,}2 \text{ kg.}$$

Fig. 83.



8) Wie grofs ist das Gewicht eines gufseisernen Trägers nach Fig. 83), wenn derselbe 5 m lang ist? (s = 7,3.)

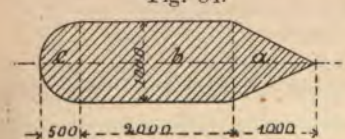
Teilt man sich das Profil des Trägers in die 3 Flächenteile a, b und c, so ist der Flächeninhalt des Trägers

$$F = a + b + c. \text{ Nun ist:}$$
$$a = 2{,}2 . 0{,}3 = 0{,}660.$$
$$b = 2{,}7 . 0{,}2 = 0{,}540.$$
$$c = 1{,}1 . 0{,}2 = 0{,}220. \text{ Mithin:}$$
$$F = 1{,}420 \text{ qdcm;}$$

folglich der Rauminhalt desselben:

$$I = F . l = 1{,}420 . 50 = 71 \text{ cdcm und damit}$$
$$G = I . s = 71 . 7{,}3 = 518{,}3 \text{ kg.}$$

Fig. 84.



9) Ein Brückenpfeiler aus Ziegelmauerwerk besitzt die in Fig. 84) angegebene Form und ist 6 m hoch. Wie grofs ist sein Gewicht, wenn das spezifische Gewicht des Mauerwerks zu 1,8 angenommen wird?

Zerlegt man sich den Querschnitt des Pfeilers in das Dreieck a, das

Rechteck b und den Halbkreis c, so folgt für den Flächeninhalt des Querschnittes — in Decimetern —

$$F = a + b + c = \frac{10 \cdot 10}{2} + 20 \cdot 10 + \frac{78{,}54}{2}.$$

$$= 50 + 200 + 39{,}27 = 289{,}3 \text{ qdcm.}$$

Da der Pfeiler 6 m = 60 dcm hoch ist, so wird

$$I = F \cdot l = 289{,}3 \cdot 60 = 17358 \text{ cdcm, folglich:}$$

$$G = I \cdot s = 17358 \cdot 1{,}8 = 31244{,}4 \text{ kg.}$$

10) Wieviel kg wiegt eine Bleikugel von 50 mm Durchmesser? (s = 11,4.)

Es ist der Inhalt der Kugel:

$$I = \frac{\pi \cdot d^3}{6} = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}{6} = 0{,}0654 \text{ cdcm;}$$

mithin nach Formel 117):

$$G = I \cdot s = 0{,}0654 \cdot 11{,}4 = 0{,}746 \text{ kg.}$$

11) Ein Wasserbehälter von cylindrischem Querschnitt besitzt einen Halbmesser r = 0,5 m und eine Höhe h = 2 m. Wieviel wiegt das Wasser, wenn der Behälter bis an den Rand gefüllt ist?

Die Wassermenge ist gleich dem Inhalte des Gefässes, mithin:

$$I = \pi r^2 \cdot h = 78{,}54 \cdot 20 = 1570{,}8 \text{ cdcm.}$$

Da nun 1 cdcm Wasser*) 1 kg wiegt, so wird:

$$G = I \cdot s = 1570{,}8 \cdot 1 = 1570{,}8 \text{ kg.}$$

12) Für den in vorstehendem Beispiele gegebenen Wasserbehälter steht aus räumlichen Rücksichten nur eine Höhe $h_1 = 1{,}5$ m zur Verfügung. Welchen Halbmesser x mufs bei dieser Höhe ein anderer Behälter von gleichem Rauminhalt erhalten?

Die Inhalte beider Behälter müssen einander gleich sein, mithin wird:

$$\pi r^2 \cdot h = \pi x^2 \cdot h_1. \quad \text{Folglich:}$$

$$x^2 = \frac{\pi r^2 \cdot h}{\pi \cdot h_1} = \frac{r^2 \cdot h}{h_1} \text{ und damit}$$

$$x = \sqrt{\frac{r^2 \cdot h}{h_1}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 5 \cdot 20}{15}} = \sqrt{33{,}33\ldots}$$

$$x = 5{,}773 \text{ dcm} = 0{,}577 \text{ m} = 577 \text{ mm.}$$

13) Ein aus einer gewissen Legierung hergestellter Würfel, dessen Seite a = 120 mm ist, wiegt 20 kg. Wie grofs ist das spezifische Gewicht der Legierung?

Der Rauminhalt des Würfels ist:

$$I = a^3 = 1{,}2^3 = 1{,}728 \text{ cdcm.}$$

Nach Formel 119) erhält man demnach:

$$s = \frac{G}{I} = \frac{20}{1{,}728} = 11{,}57.$$

14) Wieviel kg wiegt der in Beispiel 6, Seite 137) berechnete Kreisring, wenn derselbe aus Stahl hergestellt wird? (s = 7,7.)

Nach der Guldin'schen Regel ergab sich

$$I = 6{,}323 \text{ cdcm.} \quad \text{Mithin nach Formel 117):}$$

$$G = I \cdot s = 6{,}323 \cdot 7{,}7 = 48{,}687 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele: **)

1) Wie grofs ist das Gewicht einer Stange aus Quadrat-Eisen, wenn

---

*) 1 cdcm = 1 Liter.

**) Zu den folgenden Beispielen sind die Tabellen bis zur dritten Decimalstelle benützt.

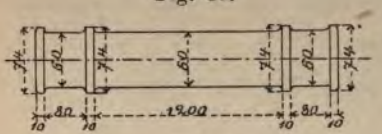
die Seite des Quadrates 40 mm und die Länge der Stange 5 m beträgt? (s = 7,7.)

Lösung: G = 61,6 kg.

2) Eine Transmissionswelle besitzt einen Durchmesser von 8 cm und eine Länge von 11,5 m. Wieviel kg wiegt diese Welle, wenn s = 7,8 gesetzt wird?

Lösung: I = 57,799 cdcm und G = 450,84 kg.

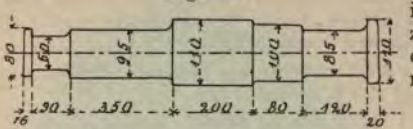
Fig. 85.



3) Wieviel kg wiegt eine Gufsstahlachse nach Fig. 85), wenn s = 7,9 angenommen wird?

Lösung: I = 4,016 cdcm und G = 31,73 kg.

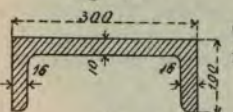
Fig. 86.



4) Es ist das Gewicht der in Fig. 86) gegebenen Achse zu berechnen. Wie grofs wird dasselbe, wenn s = 7,8 angenommen wird?

Lösung: I = 6,215 cdcm und G = 48,477 kg.

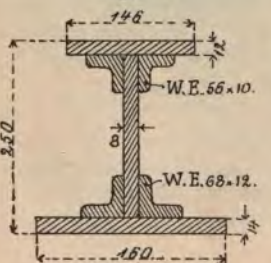
Fig. 87.



5) Wieviel kg wiegt ein schmiedeeiserner Träger nach Fig. 87), wenn derselbe 6 m lang ist? (s = 7,8.)

Lösung: I = 35,28 cdcm und G = 275,184 kg.

Fig. 88.



6) Wieviel kg wiegt der in Fig. 88) skizzierte, zusammengesetzte schmiedeeiserne Träger, wenn s = 7,7 gesetzt wird und der Träger 4 m lang ist?

Lösung: I = 43,2 cdcm und G = 332,64 kg.

7) Wieviel kg wiegen:

a) 1 qm Schmiedeeisenblech, 3 mm stark? (s = 7,78.)
b) 2 qm Kupferblech, 4 mm stark? (s = 8,9.)
c) 5 qm Messingblech, 1 mm stark? (s = 8,55.)
d) eine 3 qm grofse Gufseisenplatte, 40 mm stark? (s = 7,25.)
e) eine ausgewalzte Zinkplatte, 0,5 qm grofs und 7 mm stark? (s = 6,9.)
f) eine 1,5 qm grofse Bleiplatte, 15 mm stark? (s = 11,4.)
g) eine 2 qm grofse Gufsstahlplatte, 30 mm stark? (s = 7,87.)

Lösung: a) 23,34 kg; b) 71,2 kg; c) 42,75 kg; d) 870 kg; e) 24,15 kg; f) 256,5 kg; g) 472,2 kg.

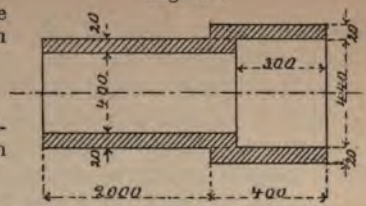
8) Wie grofs ist das Gewicht eines gufseisernen Hohlcylinders von 0,55 m lichtem Durchmesser, 15 mm Wandstärke und 1,25 m Länge? (s = 7,3.)

Lösung: I = 33,288 cdcm und G = 243,002 kg.

9) Welches Gewicht besitzt der in Fig. 89) skizzierte röhrenförmige Körper, wenn s = 7,3 angenommen wird?

Lösung: I = 66,983 cdcm
und G = 488,976 kg.

Fig. 89.



10) Welchen Durchmesser erhält eine gufseiserne Kugel von 100 kg Gewicht? (s = 7,07.)

Lösung: d = 300 mm.

11) Der rechteckige Querschnitt eines Bleiringes von 300 mm mittlerem Durchmesser besitzt eine Breite von 40 mm. Wie hoch ist der Ring, wenn sein Gewicht 13 kg beträgt? (s = 11,5.)

Lösung: h = 30 mm.

12) Eine Hohlkugel aus Gufsstahl besitzt einen inneren Durchmesser von 160 mm und eine Wandstärke von 20 mm. Wie schwer ist die Hohlkugel? (s = 7,9.)

Lösung: I = 2,043 cdcm und G = 16,140 kg.

13) Wieviel kg wiegt ein Gewicht, welches aus 15 schmiedeeisernen Platten von 20 mm Stärke und 200 mm Durchmesser besteht? (s = 7,8.)

Lösung: G = 73,523 kg.

14) Wie grofs ist das Gewicht eines Kreisringes von quadratischem Querschnitt, wenn die Seite des Quadrats 40 mm, der mittlere Durchmesser des Ringes 800 mm beträgt und der Ring aus Rotgufs hergestellt ist? (s = 8,6.)

Lösung: I = 4,021 cdcm und G = 34,581 kg.

15) Ein Kupferkegel, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 90 mm besitzt, wiegt 9 kg. Wie hoch ist der Kegel? (s = 8,8.)

Lösung: h = 482 mm.

Die in diesem Kapitel gegebenen Beispiele bilden die Grundlage für die Berechnung einzelner Maschinenteile oder ganzer Maschinen. Wenn z. B. das Gewicht eines Ventiles, Lagers, Dampfcylinders, Zahnrades oder einer Pleyelstange, Riemenscheibe, Seilscheibe u. s. w. berechnet werden soll, so müssen diese Gegenstände eben an der Hand von Skizzen oder Zeichnungen in Teile zergliedert werden, welche mit Leichtigkeit gestatten, die entsprechenden Gewichte zu ermitteln. Die Summe aller dieser Teilgewichte bildet dann das Gesamtgewicht des zu berechnenden Gegenstandes.

Der Hauptwert ist darauf zu legen, schnell einfache Formen für die einzelnen Teile und Teilchen zu finden; bei einiger Übung wird dann sehr bald ein gutes Resultat erzielt werden.

Dritter Teil.
Angewandte Mechanik.

Achtzehntes Kapitel.
Die Festigkeit.

Die Festigkeitslehre zeigt, wie diejenigen Teile, aus welchen Bau- oder Maschinenkonstruktionen zusammengesetzt sind, zu gestalten und bezüglich ihrer Abmessungen zu behandeln sind, damit sie unter möglichst geringer Materialverwendung befähigt sind, den auf sie einwirkenden äufseren Kräften genügenden Widerstand zu leisten.

Die auf einen Körper einwirkenden äufseren Kräfte haben das Bestreben, denselben einer Formveränderung — Verlängerung, Verkürzung, Biegung, Verdrehung — zu unterwerfen. Diese Formveränderung kann bis zur Zerstörung des Körpers — Rifs, Bruch — gesteigert werden.

Feste Körper setzen dieser Wirkung der an ihnen thätigen äufseren Kräfte einen Widerstand entgegen, welcher, abhängig von ihrer Beschaffenheit, gröfser oder kleiner ausfallen wird. Die Ursache dieses Widerstandes, also die den äufseren Kräften entgegenwirkende innere Kraft, ist die Zusammenhangskraft — Kohäsionskraft — der einzelnen Körperteilchen untereinander, vermöge welcher dieselben jeder Änderung ihrer gegenseitigen Lage zu widerstehen befähigt sind.

Diese zwischen den einzelnen Körperteilchen thätigen inneren Kräfte nennt man Spannungen.

Die Zusammenhangskraft ist auch zugleich die Ursache, dafs eine an einem Körper erzeugte Formveränderung wieder verschwindet, wenn die äufseren Kräfte zu wirken aufgehört haben; die Körperteilchen kehren dann in ihre ursprüngliche Lage wieder zurück. Dieses Bestreben eines Körpers,

seine ursprüngliche Gestalt wieder anzunehmen, nennt man Elastizität.

Aber nicht immer nehmen die Teilchen eines Körpers ihre ursprüngliche Lage wieder ein. Wenn die Formveränderung eine gewisse Grenze überschreitet, behält der Körper dieselbe teilweise bei, nachdem die äufseren Kräfte zu wirken aufgehört haben — er bleibt verlängert, verkürzt, verbogen. Diese Grenze, bis zu welcher man einem festen Körper eine Formveränderung zumuten darf, damit er noch in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt, nennt man die Elastizitätsgrenze.

Nimmt die Formveränderung noch über die Elastizitätsgrenze hinaus zu, so wird schliefslich der Zusammenhang der einzelnen Körperteilchen untereinander zerstört. Der Widerstand, welcher hierbei durch die Zusammenhangskraft der Trennung der Körperteilchen entgegengesetzt wird, heifst Festigkeit.

Die Grenze, bis zu welcher man einen Körper der Einwirkung äufserer Kräfte unterwerfen kann, ohne dafs seine vollkommene Zerstörung eintritt, nennt man die Festigkeitsgrenze.

Diese und die Grenze der vollkommenen Elastizität liegen bei den verschiedenen Materialien sehr verschieden zu einander. So liegen dieselben beim Gufseisen z. B. sehr nahe; denn überschreitet man hier nur um ein Geringes die Elastizitätsgrenze, so wird unmittelbar die Festigkeitsgrenze erreicht, d. h. der Zusammenhang der einzelnen Teile des Körpers wird bei weiterer Belastung zerstört. Schmiedeeisen hingegen kann nach Überschreiten seiner Elastizitätsgrenze noch bedeutende Formveränderungen erleiden, ehe es der Zerstörung anheimfällt.

Je nach der Art und Weise, in welcher äufsere Kräfte einen Körper beeinflussen, Formveränderungen an demselben erzeugen und ihn zu zerstören suchen, unterscheidet man folgende Arten der Festigkeit:

1) Absolute oder Zugfestigkeit, wenn ein Körper an einem Ende festgehalten und am anderen Ende ein in der Mittellinie dieses Körpers wirkender Zug ausgeübt wird, welcher ihn zu verlängern oder zu zerreifsen sucht. (Seile, Riemen, Ketten, Zugstangen u. s. w.)

2) Rückwirkende oder Druckfestigkeit, wenn an Stelle des Zuges in der Mittellinie des Körpers ein Druck ausgeübt wird. (Fundamente, Unterlagen, kurze Stützen u. s. w.)

Ist hierbei die Länge des Körpers im Verhältnis zu seinen Querschnittsabmessungen sehr grofs, so wird ein Ausbiegen desselben in der Mitte stattfinden. Der Körper wird alsdann

auf Zerknicken in Anspruch genommen. (Säulen, stehende Wellen, Pleyelstangen, Krahnausleger u. s. w.)

3) Scher- oder Schubfestigkeit, wenn Kräfte die Teile eines Körpers übereinander zu schieben suchen. (Nieten, Bolzen, Keile, Schraubengewinde u. s. w.)

4) Relative- oder Biegungsfestigkeit, wenn der Körper an einem oder an mehreren Punkten unterstützt ist und die senkrecht zu seiner Längsachse wirkenden Kräfte denselben durch Biegung zu zerstören suchen. (Träger in Gebäuden, die Arme der Hebel, Zähne der Räder, Krahnbalken, Achsen, Zapfen u. s. w.)

5) Torsions- oder Drehungsfestigkeit, wenn der Körper an der Drehung um seine Achse verhindert ist und an demselben Kräfte wirken, welche die Teile des Körpers schraubenförmig verwinden. (Wellenleitungen.)

Um nun die den verschiedenen Festigkeitsarten entsprechenden und im Inneren der Körper auftretenden Widerstände genau untersuchen und beurteilen zu können, bezieht man dieselben auf eine Flächen-Einheit. Es soll den folgenden Berechnungen als

Flächeneinheit 1 qcm und als
Krafteinheit 1 kg

zu Grunde gelegt werden.

Ferner ist noch besonders zu beachten:

Da bei Eintritt einer bleibenden Formveränderung ein Körper bereits als teilweise zerstört angesehen werden kann, so darf bei statischen Konstruktionen die Elastizitätsgrenze niemals überschritten werden.

Diejenige Belastung, welche in der Praxis dem Material auf die Dauer und mit Sicherheit zugemutet werden kann, die zulässige Belastung, Faserspannung, zulässige Inanspruchnahme, zulässige Beanspruchung, mufs daher immer kleiner als die Belastung sein, welche den Körper bis zur Elastizitätsgrenze beansprucht.

Gewöhnlich wird bei Eisenkonstruktionen nur ein gewisser Teil der einen Körper bis zur Elastizitätsgrenze beanspruchenden Belastung in die Rechnung eingeführt.

---

1) Zugfestigkeit.

Durch Versuche ist festgestellt worden, dafs die Zugfestigkeit nur von der Gröfse des Querschnittes eines Körpers *abhängig* und diesem Querschnitte zugleich direkt proportional *ist; d. h. hat* ein Körper einen doppelt so grofsen Querschnitt

als ein anderer gleichen Materiales, so ist er auch in der Lage, den doppelten Zug auszuhalten.

Die Kraft oder das Gewicht, welche einen Körper, dessen Querschnitt = 1 qcm ist, zu zerreifsen vermag, wird Festigkeitskoeffizient genannt.

Bezeichnet man mit

*) k die zulässige Beanspruchung des Materiales in kg auf 1 qcm (Festigkeitskoeffizient);

F den Querschnitt des Körpers in qcm;

P die Kraft in kg, welche den Körper angreift, so ist

$$P = F \cdot k \quad \ldots \quad 120)$$

Hieraus folgt: $$F = \frac{P}{k} \quad \ldots \quad 121)$$

und $$k = \frac{P}{F} \quad \ldots \quad 122)$$

In der Praxis geht man in der zulässigen Beanspruchung der verschiedenen Materialien nicht über die Hälfte der zur Erreichung der Elastizitätsgrenze erforderlichen Belastung hinaus, und sind die allgemein gebräuchlichen Koeffizienten in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt.

Tabelle der Koeffizienten der Zugfestigkeit.

Namen der Materialien.	In der Praxis zulässige Belastung k	Belastung, welche den Körper bis zur	
		Elastizitätsgrenze beansprucht	Festigkeitsgrenze beansprucht
	in kg pro 1 qcm.		
Eisendraht	1200	2200	6500
Stabeisen	750	1500	4000
Eisenblech	750	1500	3500
Gufseisen	**) 250	900	1250
Stahl	1500	3000	6000
Kupfer	250	300	3000
Messing	250	480	1200
Holz, hart	100	200	800
Holz, weich	70	140	680

*) In der folgenden Tabelle sind die Belastungen in kg pro 1 qcm angegeben. Wünscht man dieselbe auf eine andere Flächeneinheit bezogen zu wissen, so ist z. B. für Schmiedeeisen zu beachten:

k = 750 kg pro 1 qcm (laut Tabelle); mithin:
= 7,5 kg pro 1 qmm
= 75000 kg pro 1 qdcm
= 7500000 kg pro 1 qm.

**) *Für Biegungsfestigkeit* k = 500 kg.

Die in der Praxis zulässige Belastung k kann jedoch unter Umständen von den Werten der Tabelle abweichen. Hierbei ist besonders zu berücksichtigen:

1) Ob das Material von überall gleichartiger Beschaffenheit ist; z. B. Gufseisen, Stahl, Messing.

2) Ob das Material sich im Laufe der Zeit ändert; z. B. Rosten, Faulen, Verwittern.

3) Ob die Belastung eine ruhige ist, oder Stöfse und Erschütterungen mit derselben verbunden sind; z. B. Dachstühle, Eisenbahnbrücken, Lokomotiven.

4) Ob der Körper wechselnd bald auf Druck oder bald auf Zug beansprucht wird; z. B. Pleyelstangen.

5) Ob der Körper einer mehr oder weniger schnellen Abnützung unterworfen ist; z. B. Zapfen, Seile, Ketten.

6) Ob seine Zerstörung mehr oder weniger nachteilige Folgen mit sich bringt.

Als Mafsstab für die Annahme des Wertes von k kann entsprechend den Punkten 1—6) folgendes dienen:

Folgt auf die gröfste Belastung eines Körpers, für welche die Berechnung auf Festigkeit stets durchzuführen ist, eine völlige Entlastung, so nehme man die Werte der Tabelle.

Ist die Belastung eine vollkommen ruhige, ohne Stöfse und ohne Erschütterungen, so kann man k um die Hälfte gröfser, als wie in der Tabelle angegeben, nehmen.

Ist jedoch die Belastung eine zwischen einem gröfsten Druck und einem gröfsten Zug schwankende, so nehme man für k nur die Hälfte des Tabellenwertes.

In den folgenden Beispielen ist auf die Verschiedenartigkeit der Gröfse des Wertes k zu achten.

Beispiele:*)

1) Bei welcher Belastung zerreifst eine Stange von Stabeisen, welche 6,5 cm breit und 3 cm stark ist?

Der Querschnitt F der Stange ist $= 6{,}5 \cdot 3 = 19{,}5$ qcm; k ist nach vorstehender Tabelle $= 4000$ kg, mithin nach Formel 120):

$$P = F \cdot k = 19{,}5 \cdot 4000 = 78000 \text{ kg}.$$

2) Wie grofs ist für diese Stange die Belastung an der Elastizitätsgrenze?

Hier ist $k = 1500$ zu setzen, mithin nach Formel 120):

$$P = F \cdot k = 19{,}5 \cdot 1500 = 29250 \text{ kg}.$$

3) Wie grofs wird die Belastung auf 1 qcm, wenn die in den vorstehenden Beispielen berechnete Stange a) mit 60000 kg und b) mit 100000 kg belastet wird?

Nach Formel 122) ergiebt sich:

$$\text{a) } k = \frac{P}{F} = \frac{60000}{19{,}5} = 3077 \text{ kg}.$$

$$\text{b) } k = \frac{P}{F} = \frac{100000}{19{,}5} = 5128 \text{ kg}.$$

---

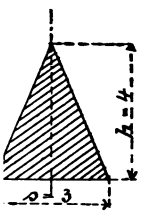
*) Unter Anwendung der Tabellen im Anhange des Buches.

4) Welche zulässige Belastung kann dieselbe Stange mit einer ir die Praxis genügenden Sicherheit tragen?

Hier ist k = 750 kg zu setzen, mithin nach Formel 120):

$$P = F \cdot k = 19{,}5 \cdot 750 = 14625 \text{ kg}.$$

Fig. 90.



5) Wie viel kg kann eine Stahlstange mit Dreieck Querschnitt nach nebenstehender Fig. 90) tragen: a) als zulässige Belastung; b an der Elastizitätsgrenze; c) an der Festigkeitsgrenze?

Der Querschnitt F der Stange ist dem Dreieck- entsprechend:

$$F = \frac{\text{Grundlinie} \times \text{Höhe}}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ qcm}.$$ Mithin

nach Formel 120): a) $P = F \cdot k = 6 \cdot 1500 = 9000$ kg.
b) $P = F \cdot k = 6 \cdot 3000 = 18000$ kg.
c) $P = F \cdot k = 6 \cdot 6000 = 36000$ kg.

6) Wie groſs wird die Beanspruchung auf 1 qcm in der Stange ach Beispiel 5), wenn dieselbe mit 10500 kg belastet wird?

Nach Formel 122) ist:

$$k = \frac{P}{F} = \frac{10500}{6} = 1750 \text{ kg}.$$

7) Wieviel kg kann eine Messingstange von quadratischem Querhnitt mit genügender Sicherheit tragen, wenn die Seite des Quadrates cm lang ist?

Der Querschnitt F der Stange ist, weil quadratisch,

$F = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$ qcm. Mithin nach Formel 120):

$P = F \cdot k = 9 \cdot 250 = 2250$ kg.

eil hier k der geforderten Sicherheit wegen = 250 genommen werden ufs. Siehe Tabelle Seite 147.)

8) Welche Belastung kann eine Stange aus Rundeisen mit Sicherit tragen, wenn der Durchmesser des Rundeisens = 6 cm ist?

Der Tabelle entsprechend wird F = 28,27 qcm; mithin nach rmel 120):

$$P = F \cdot k = 28{,}27 \cdot 750 = 21203 \text{ kg}.$$

9) Durch eine Konstruktionsbedingung ist für eine Flacheisenstange, lche eine Belastung von 21000 kg mit Sicherheit tragen soll, eine eite von b = 10 cm vorgeschrieben. Welche Stärke a muſs das Flachen erhalten?

Die Stärke a kann nur aus dem Flächeninhalt $F = a \cdot b$ des Quernittes der Stange gefunden werden. Derselbe ergiebt sich nach rmel 121) zu:

$$F = \frac{P}{k} = \frac{21000}{750} = 28 \text{ qcm}.$$

Setzt man diese 28 qcm gleich dem Querschnitt $a \cdot b$, so folgt:

$a \cdot b = 28$ und damit

$$a = \frac{28}{b} = \frac{28}{10} = 2{,}8 \text{ cm}.$$

10) Eine schmiedeiserne Stange aus Quadrateisen soll einen Zug 1 7000 kg mit Sicherheit aufnehmen. Wie groſs wird die Seite a Quadrates? (k = 700.)

Die Seite a ergiebt sich auch hier wieder nur aus dem Querschnitte = a^2 des Quadrateisens. Letzterer wird nach Formel 121)

$$F = \frac{P}{k} = \frac{7000}{700} = 10 \text{ qcm}.$$

Da nun auch $a^2 = 10$ sein muſs, so folgt

$$a = \sqrt{10} = 3{,}162 \text{ cm}.$$

*) Vergl. Seite 22 unter Z.

11) Eine Stange aus Rundeisen von 4 cm Durchmesser hat einem Zuge von 6000 kg widerstanden; wie grofs war die Spannung pro qcm?

Gegeben sind: $P = 6000$; $F = 12{,}57$; mithin nach Formel 122):

$$k = \frac{P}{F} = \frac{6000}{12{,}57} = 477 \text{ kg}.$$

12) Eine Zugstange aus Rundeisen hat eine Belastung von 4000 kg zu tragen; welchen Durchmesser d mufs dieselbe bei genügender Sicherheit erhalten?

Gegeben sind: $P = 4000$; $k = 750$ kg und der Stangenquerschnitt

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4}.$$

Demnach ergiebt sich, da der Durchmesser d nur aus dem Querschnitte F der Stange ermittelt werden kann, letzter nach Formel 121) zu:

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{P}{k}. \text{ Hieraus folgt:}$$

$$d^2 = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot k} \text{ und damit}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 4000}{3{,}14 \cdot 750}} = 2{,}6 \text{ cm}.$$

13) Die Dampfspannung in einem Dampfcylinder von 35 cm Durchmesser beträgt 5 Atm. Zur Befestigung des Cylinderdeckels sollen 6 Schraubenbolzen angewendet werden; welchen Durchmesser d müssen dieselben erhalten?

Den Druck auf den Deckel erhält man, wenn man den Flächeninhalt*) desselben in qcm mit dem Atmosphärendrucke multipliziert; derselbe wird also $= 962 \cdot 5 = 4810$ kg. Dieser Druck verteilt sich gleichmäfsig auf die 6 Schrauben, mithin kommt auf jede Schraube ein Druck $P = \frac{4810}{6} = 802$ kg (abgerundet).

Nimmt man der gröfseren Sicherheit halber k nur zu 400 kg an, so erhält man den Flächeninhalt eines Schraubenquerschnittes, wenn man den Kerndurchmesser der Schraube mit d bezeichnet, nach Formel 121) zu:

$$F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{P}{k}, \text{ woraus, wie in Beispiel 12, folgt:}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 802}{3{,}14 \cdot 400}} = 1{,}6 \text{ cm} = 16 \text{ mm}.$$

Bei Benützung der unter „Drehbänke“ angegebenen Schraubentabelle entspricht diesem Kerndurchmesser ein Schraubenbolzen von $^3/_4$“ engl. Gewinde.

14) Welchen Durchmesser d erhalten die Glieder einer Kette, wenn diese eine Last von 1500 kg tragen soll?

Da das Kettenglied in seinen Längsseiten nur auf Zug beansprucht wird, so ist der tragende Querschnitt der Kette $F = 2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}$; nimmt man hier k zu 600 kg an, so ergiebt sich aus Formel 120):

$$P = F \cdot k = 2 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot k \text{ und damit}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot P}{2 \cdot \pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1500}{2 \cdot 3{,}14 \cdot 600}} = 1{,}26 \text{ cm}.$$

---

*) Siehe Tabellen im Anhange.

Übungsbeispiele:

1) Welche Belastung kann ein schmiedeeiserner Stab von quadratischem Querschnitt mit Sicherheit tragen, wenn die Seite des Quadrates 2 cm lang ist?

Lösung: P = 3000 kg.

2) Welche Kraft ist erforderlich, diesen Stab zu zerreifsen?

Lösung: P = 16000 kg.

3) Welche Kraft beansprucht denselben Stab bis zu seiner Elastizitätsgrenze?

Lösung: P = 6000 kg.

4) Eine Hängesäule mit quadratischem Querschnitt aus Eichenholz soll eine Belastung von 14000 kg mit Sicherheit tragen. Wie grofs wird die Seite des Quadrates? (k = 100.)

Lösung: a = 11,83 cm = 118 mm.

5) Welchen Durchmesser erhält eine Rundeisenstange, welche 25000 kg mit Sicherheit tragen soll?

Lösung: d = 6,5 cm = 65 mm.

6) Ein Riemen von 0,3 cm Stärke hat einen Zug von 450 kg auszuhalten; welche Breite b mufs man demselben geben? (k = 100.)

Lösung: b = 15 cm = 150 mm.

7) Die Zugstange eines Daches besteht aus 2 Flacheisen, welche je 1 cm stark sind. Welche Breite b erhalten die Flacheisen, wenn die Stange einen Zug von 9000 kg aufnehmen soll?

Lösung: b = 6 cm = 60 mm.

8) Welche Last kann eine eiserne Kette tragen, wenn die Kettenseisenstärke 2 cm beträgt? (k = 500.)

Lösung: P = 3140 kg.

9) Welchen Durchmesser erhalten die 4 schmiedeeisernen Säulen einer hydraulischen Presse, wenn der durch die Presse ausgeübte Druck 100000 kg beträgt? (k = 750.)

Lösung: d = 6,5 cm = 65 mm.

10) Eine hydraulische Presse besitzt einen Presscylinder von 300 mm Durchmesser, in welchem ein Druck von 200 Atmosphären herrscht. Welchen Durchmesser erhalten hier die 4 Säulen?

Lösung: d = 7,7 cm = 77 mm.

11) Eine schmiedeeiserne Stange von 32 mm Durchmesser hat einem Zuge von 5300 kg mit Sicherheit widerstanden. Wie grofs war die Belastung auf 1 qcm?

Lösung: k = 659 kg.

12) Eine cylindrische Stahlstange soll mit Sicherheit 3000 kg tragen. Wie grofs mufs ihr Querschnitt werden?

Lösung: F = 2 qcm = 200 qmm.

13) An einer Eisenkonstruktion soll ein Flacheisenstab einen Zug von 10000 kg aufnehmen. Welche Abmessungen erhält sein rechteckiger Querschnitt, wenn die Seiten desselben sich wie 2 : 5 verhalten sollen? (k = 700.)

Lösung: a = 2,4 cm = 24 mm; b = 6 cm = 60 mm.

---

2) Druckfestigkeit.

Die Widerstandsfähigkeit, welche die Körper gegen Kräfte äufsern, die sie durch Annäherung ihrer Teile zu zerstören suchen, ist von verschiedenen Gesichtspunkten aus zu betrachten, je nachdem die Körper würfelförmig oder säulen-

förmig sind. Im ersteren Falle findet ein Zerdrücken, im zweiten meistens ein Zerknicken statt, indem vor dem eigentlichen Bruch noch eine Biegung eintritt. Das Gesetz für die Druckfestigkeit säulenförmiger Körper ist so kompliziert, dafs es hier aufser Acht gelassen werden mufs; das Gesetz für die Druckfestigkeit würfelförmiger oder plattenförmiger Körper gestaltet sich jedoch äufserst einfach. Es ist in diesem Falle wiederum die Festigkeit nur proportional dem Querschnitt F des gedrückten Körpers und wird auch hier die Kraft P, welche den Körper zerdrückt:

$$P = F \cdot k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 123)$$

wenn k den Koeffizienten der Druckfestigkeit bezeichnet.

Tabelle der Koeffizienten der Druckfestigkeit.

Namen der Materialien	Bruchbelastung	Zulässige Belastung k
	kg pro qcm	
Gufseisen	6000	600
Schmiedeeisen	3000	750
Stahl	6000	1200
Kalkstein	300—500	30—50
Sandstein	200—300	20—30
Ziegelstein	60—120	6—12
Eiche und Tanne	500	80
Buche	600	100

Beispiele:

1) Welche Kraft P ist erforderlich, um einen eichenen Ständer von 21×31 cm Querschnitt zu zerdrücken, $\div k = 500 \div$ und welche Last Q kann dieser Ständer tragen, wenn die zulässige Belastung zu 80 kg pro qcm angenommen wird?

Nach Formel 123) ist:

$$P = F \cdot k = 21 \cdot 31 \cdot 500 = 325500 \text{ kg und}$$
$$Q = F \cdot k = 21 \cdot 31 \cdot 80 = 52080 \text{ kg.}$$

2) Die Decke eines Speichers wird durch 6 tannene Säulen von quadratischem Querschnitt unterstützt. Die gröfste Belastung einer Säule betrage 36000 kg; welche Querschnittsabmessungen mufs man der Säule geben?

Die zu berechnende Seite a des Quadrates ergiebt sich nur aus dem Querschnitte der Säule: $F = a^2$. Letzterer entwickelt sich aus Formel 123), entsprechend Formel 121), zu:

$$F = \frac{P}{k} = a^2 = \frac{36000}{80} \text{ und damit}$$

$$a = \sqrt{\frac{36000}{80}} = \sqrt{450} = 21{,}2 \text{ cm} = 212 \text{ mm.}$$

3) Wie grofs wird die Belastung eines 2 Stein starken quadratischen Pfeilers aus Ziegelsteinen, wenn die zulässige Belastung pro 1 qcm zu $k = 6$ kg angenommen wird?

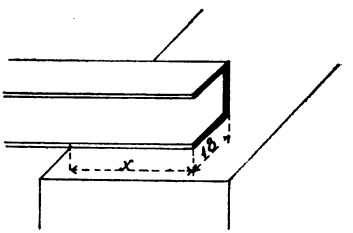
Bei Anwendung von gewöhnlichen Ziegeln ($25 \times 12 \times 6{,}5$ cm)

ıter Annahme einer Fugenstärke von 1 cm, wird die Seitenlänge des feilers $a = 25 + 1 + 25 = 51$ cm, mithin der Querschnitt $F = a^2 =$ $. 51 = 2601$ qcm und damit nach Gleichung 123):

$$P = F . k = 2601 . 6 = 15606 \text{ kg.}$$

4) Ein [-Eisen (Fig. 91) drückt it 5400 kg anf eine Mauer. Wie ›it mufs der Träger auf der Mauer f liegen, wenn sein Flansch 18 cm eit angenommen wird und eine be- ndere Druckplatte nicht angewendet ›rden soll?

Fig. 91.



Nimmt man k zu 12 kg pro qcm an, so folgt aus Formel 123):

$$F = \frac{P}{k} = \frac{5400}{12} = 450 \text{ qcm.}$$

Setzt man die Länge des aufliegenden Teiles des [-Eisens = x, so wird

$$F = 18 . x = 450 \text{ und damit:}$$

$$x = \frac{450}{18} = 25 \text{ cm.}$$

5) Welchen Durchmesser erhält der schmiedeeiserne Spurzapfen ıer 500 kg schweren, senkrecht stehenden Welle. wenn derselbe mit ›herheit den stattfindenden Druck aufnehmen soll?

Bezeichnet man den Durchmesser mit d und setzt man k der deutenden Abnützung wegen = 300 kg, so folgt aus Formel 123):

$$F = \frac{P}{k} = \frac{\pi . d^2}{4} \text{ und hieraus}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 . P}{\pi . k}} = \sqrt{\frac{4 . 500}{3{,}14 . 300}} = 1{,}5 \text{ cm} = 15 \text{ mm.}$$

6) Welche Last vermag eine kurze, hohle gufseiserne Säule mit ›herheit zu tragen, wenn der innere Durchmesser d = 20 cm und der fsere $d_1 = 30$ cm angenommen wird? (k = 500.)

Der tragende Querschnitt F der Säule wird erhalten, wenn man n Flächeninhalt des inneren Kreises. von dem des äufseren abzieht; mnach wird:

$$= \frac{\pi . d^2_1}{4} - \frac{\pi . d^2}{4} = 706{,}86 - 314{,}16 = 392{,}7 \text{ qcm.}$$ Mithin nach rmel 123):

$$P = F . k = 392{,}7 . 500 = 196350 \text{ kg.}$$

ungsbeispiele:

1) Welchen Druck vermag ein Gufseisenstab mit Sicherheit auf- ıehmen, wenn die Seite des quadratischen Querschnittes a = 50 mm ist?

Lösung: P = 12500 kg.

2) Welche Kraft wird denselben Stab zerdrücken?

Lösung: P = 150000 kg.

3) Wie grofs mufs der Durchmesser einer kurzen, vollen gufs- ›rnen Säule sein, welche eine Last von 100530 kg mit Sicherheit trägt?

Lösung: d = 16 cm = 160 mm.

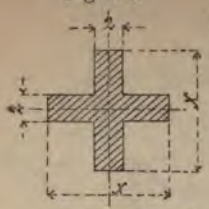
4) Welche Länge a erhält die Seite des quadratischen Fufses der- ›en Säule, wenn ein darunter liegender Granitquader mit k = 30 kg nsprucht werden darf?

Lösung: a = 57,8 cm = 580 mm (abgerundet).

5) Eine kurze, hohle gufseiserne Säule soll 30000 kg mit Sicher- ; tragen. Wie grofs wird der innere Durchmesser der Säule, wenn äufsere zu 120 *mm* angenommen wird?

Lösung: d = 8,2 cm = 82 mm.

Fig. 92.



6) Eine kurze, gufseiserne Säule nach Fig. 92) soll 10000 kg mit Sicherheit tragen. Wie grofs wird die Abmessung x?

Lösung: $x = 6$ cm $= 60$ mm.

7) Welchen Druck vermag ein Würfel aus Kalkstein aufzunehmen, wenn dessen Seitenlänge $a = 400$ mm ist? ($k = 40$.)

Lösung: $P = 64000$ kg.

8) Welchen Durchmesser d erhält der Spurzapfen einer stehenden, schmiedeeisernen Welle von 140 mm Durchmesser und 10 m Länge, auf welcher 3 Zahnräder von je 600 kg und 3 Riemenscheiben von je 100 kg Gewicht sitzen? ($s = 7{,}8$; $k = 165$.)

Lösung: $d = 5$ cm $= 50$ mm.

9) Ein Gebäude von 1000000 kg Gewicht steht auf einem Pfahlroste, dessen einzelne Pfähle einen Durchmesser von 250 mm haben. Wie viele Pfähle befinden sich in dem Pfahlroste, wenn k den Wert von 40 nicht überschreiten soll?

Lösung: 51 Pfähle.

3) Scher- oder Schubfestigkeit.

Diese Art der Festigkeit ist am häufigsten bei den zur Verbindung von Blechen dienenden Nieten, bei Verbindungskeilen, Schraubenbolzen und beim Lochen und Abschneiden von Blechen zu berücksichtigen.

Nach Versuchen wächst die Scher- oder Schubfestigkeit, wie die absolute Festigkeit, mit dem Querschnitte des Körpers oder mit der Gröfse der Trennungsfläche.

Bezeichnet man mit

P die auf Abscheren wirkende Kraft in kg;

F den Querschnitt des Körpers in qcm;

k_1 den Festigkeitskoeffizienten für Scherfestigkeit,

so wird

$$P = F \cdot k_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 124)$$

Soll der Körper mit Sicherheit dem Abscheren widerstehen, so nimmt man als zulässige Belastung pro 1 qcm jedoch nur $^4/_5$ der in der Tabelle für die Koeffizienten der Zugfestigkeit*) gegebenen Werte an; man setzt also

$$k_1 = \frac{4}{5} \cdot k.$$

Setzt man diesen Wert für k_1 in Gleichung 124) ein, so folgt:

$$P = \frac{4}{5} \cdot F \cdot k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 125)$$

und

$$F = \frac{5 \cdot P}{4 \cdot k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 126)$$

*) *Siehe Seite 147.)*

Es finden diese Formeln hauptsächlich Anwendung zur Berechnung von Schraubenbolzen und Nieten.

Der Widerstand gegen das Lochen von Eisenblechen beträgt 4300 kg pro qcm Schnittfläche; gegen Abscheren jedoch nur 3275 kg pro qcm Schnittfläche.

Beispiele:

1) Welche Belastung kann ein Niet von 2,6 cm Durchmesser gegen Abscheren aufnehmen? (k = 1000.)

Der Querschnitt des Nietes ist $F = \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 5{,}309$ qcm. Mithin nach Formel 125):

$$P = \frac{4 \cdot F \cdot k}{5} = \frac{4 \cdot 5{,}309 \cdot 1000}{5} = 4247 \text{ kg.}$$

2) Bei welcher Belastung wird das Niet zerstört? (k = 6000.)

Aus Formel 125) folgt:

$$P = \frac{4 \cdot F \cdot k}{5} = \frac{4 \cdot 5{,}309 \cdot 6000}{5} = 25483 \text{ kg.}$$

3) Wie grofs mufs der Durchmesser d eines schmiedeeisernen Bolzens sein, welcher einer abscherenden Kraft von 6000 kg mit genügender Sicherheit widerstehen soll? (k = 750.)

Der Durchmesser läfst sich nur aus der Querschnittsfläche des Bolzens $F = \frac{\pi \cdot d^2}{4}$ ermitteln, mithin nach Formel 126):

$$F = \frac{5 \cdot P}{4 \cdot k} = \frac{\pi \cdot d^2}{4}, \text{ woraus folgt:}$$

$$d = \sqrt{\frac{5 \cdot P}{\pi \cdot k}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 6000}{3{,}14 \cdot 750}} = 3{,}5 \text{ cm} = 35 \text{ mm.}$$

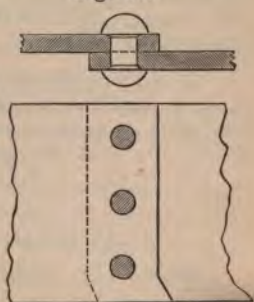
4) Welche Kraft ist zum Durchstofsen des Bleches für ein Niet von d = 2,6 cm Durchmesser erforderlich, wenn die Blechstärke h = 2 cm beträgt? (Vergl. Beispiel 1; k = 3500.)

Die abzuscherende Fläche ist gleich einem Cylindermantel, dessen Umfang gleich demjenigen des Nietes, und dessen Höhe gleich der Blechstärke ist; mithin $F = \pi \cdot d \cdot h = 3{,}14 \cdot 2{,}6 \cdot 2 = 16{,}328$ qcm, folglich nach Formel 124):

$$P = F \cdot k_1 = 16{,}328 \cdot 3500 = 57148 \text{ kg.}$$

5) Welche Kraft ist erforderlich, um die in Fig. 93) dargestellte Nietverbindung durch Abscheren der Nieten zu zerstören, wenn der Durchmesser derselben 20 mm beträgt und die Kraft sich auf alle 3 Nieten gleichmäfsig verteilt?

Fig. 93.



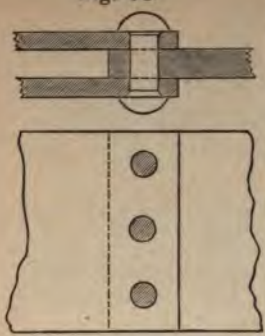
In diesem Falle sind die 3 Nieten nur in **einer** Querschnittsfläche abzuscheren, daher der Inhalt der gesamten Trennungsfläche:

$$F = 3 \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3 \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 2}{4} = 9{,}42 \text{ qcm.}$$

Mithin nach Formel 125):

$$P = \frac{4 \cdot F \cdot k}{5} = \frac{4 \cdot 9{,}42 \cdot 6500}{5} = 48984 \text{ kg.}$$

Fig. 94.



6) Wie grofs ist die zulässige Belastung der in Fig. 94) dargestellten Nietverbindung, wenn der Durchmesser der Nieten 20 mm beträgt und die Kraft sich auf alle 3 Nieten gleichmäfsig verteilt?

Bei dieser Nietverbindung sind die Nieten in **zwei** Querschnittsflächen abzuscheren, daher der Inhalt der gesamten Trennungsfläche:

$$F = 6 . \frac{\pi . d^2}{4} = \frac{6 . 3{,}14 . 2 . 2}{4} = 18{,}84 \text{ qcm.}$$

Mithin nach Formel 125):

$$P = \frac{4 . F . k}{5} = \frac{4 . 18{,}84 . 750}{5} = 11304 \text{ kg.}$$

Übungsbeispiele:

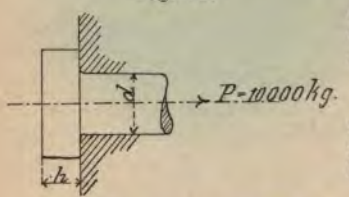
1) Welche Belastung P kann ein Dübel aus Buchenholz von 30 mm Durchmesser mit Sicherheit aufnehmen? (k = 100.)

Lösung: P = 566 kg.

2) Zwei Flacheisen sind durch 4 Nieten von je 23 mm Durchmesser verbunden. Welche Schubkraft P ist zur Zerstörung dieser Verbindung erforderlich? (k = 6500.)

Lösung: P = 86403 kg.

Fig. 95.



3) Welchen Durchmesser erhalten die Nieten des vorigen Beispieles, wenn sie durch eine Kraft von 60000 kg zerstört werden sollen? (k = 6500.)

Lösung: d = 1,9 cm = 19 mm.

4) In eine Blechtafel von 20 mm Stärke sollen Löcher von 23 mm Durchmesser gestanzt werden. Welche Kraft ist hierzu erforderlich? (k = 4300.)

Lösung: P = 62143 kg.

5) Wie grofs mufs die Kopfhöhe h eines Schraubenbolzens von d = 40 mm Durchmesser werden, wenn derselbe nach Fig. 95) mit 10000 kg belastet wird? (k = 750.)

Lösung: h = 1,3 cm = 13 mm.

6) Wie grofs wird die Scherspannung k_1 in demselben Bolzen, wenn er unter gleichen Verhältnissen nur mit 8500 kg belastet wird?

Lösung: k_1 = 521 kg.

7) 2 Bleche sind durch Doppellaschennietung, in welcher sich im Ganzen 6 Nieten von 13 mm Durchmesser befinden, verbunden. Welche Scherspannung herrscht in jedem der 6 Nieten, wenn die Verbindung einer abscherenden Kraft von 9000 kg widerstehen soll? (Anm. Zweischnittige Nieten!)

Lösung: k_1 = 585 kg.

8) Ein gufseiserner Stab von rechteckigem Querschnitt hat einer abscherenden Kraft von 7500 kg mit Sicherheit Widerstand geleistet. Wie grofs wird die eine Seite b des Querschnittes des Stabes, wenn die andere zu a = 45 mm angenommen wird? (k = 250.)

Lösung: b = 6,6 cm = 66 mm.

4) Relative oder Biegungsfestigkeit.

Wird ein Balken an einem Ende fest eingespannt oder in mehreren Punkten unterstützt, und wirkt eine Kraft senk-

recht zur Längsrichtung auf denselben, so sucht diese Kraft den Balken abzubrechen oder durchzubiegen.

Der Widerstand, welchen ein Körper diesem Abbrechen oder Durchbiegen entgegensetzt, heifst relative oder Biegungsfestigkeit.

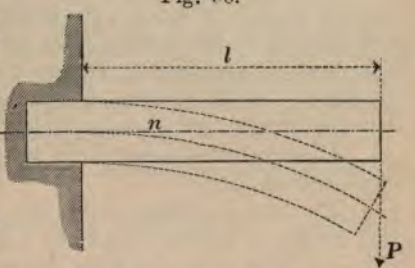
Im Allgemeinen wächst zwar dieser Widerstand bei demselben Körper unter gleichen Umständen mit der Gröfse seines Querschnittes; es sind aber zur Bestimmung der Gröfse dieses Widerstandes noch folgende Punkte in Betracht zu ziehen:

Die relative Festigkeit hängt ab von der Form des Querschnittes und der Lage desselben, von der Länge des Körpers, von der Art und Weise der Belastung — d. h. ob die Last am Ende oder in der Mitte angreift, oder ob sie über den ganzen Balken gleichmäfsig verteilt ist — schliefslich von der Art der Unterstützung und Auflagerung.

Haben z. B. zwei Körper gleichen Materiales gleich grofse Querschnitte, — der eine einen quadratischen, der andere einen kreisförmigen — so ist die Widerstandsfähigkeit des quadratischen Körpers gröfser, als diejenige des kreisförmigen. Ebenso trägt ein Körper von rechteckigem Querschnitt mehr, wenn er auf der kleinen Seite des Rechtecks liegt, als wenn er auf die grofse Seite desselben gelegt wird.

Wird ein Körper an einem Ende fest eingespannt (Fig. 96) und am anderen Ende senkrecht zu seiner Längsrichtung durch ein Gewicht P belastet, so wird dieses Gewicht den Körper um eine in dem Querschnitte liegende Achse n zu biegen suchen. Sämtliche Querschnittsteile oder Fasern, welche sich über n befinden, werden hierdurch ausgereckt, die unterhalb liegenden dagegen zusammengedrückt.

Fig. 96.



Die in der Achse n liegenden Querschnittsteile oder Fasern werden aber weder ausgereckt noch zusammengedrückt, d. h. sie bleiben neutral. Man nennt deshalb auch diese Achse „Neutrale Achse“ und die mit derselben zusammenfallende Faserschicht „Neutrale Faserschicht.“

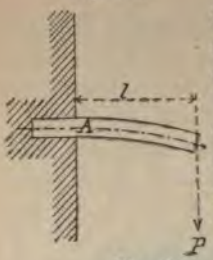
Sind die Widerstände gegen das Zusammendrücken und Ausrecken der unterhalb und oberhalb der Achse n liegenden Fasern gleich grofs, so geht diese Achse durch den Schwerpunkt des Querschnittes.

Bei der Beanspruchung eines Körpers auf Biegungs-

festigkeit hat man es stets mit einer Beanspruchung durch ein statisches Moment*) zu thun.

Ist z. B. ein Körper an seinem einen Ende A fest eingespannt — unwandelbar befestigt — und an dem anderen mit einer Kraft P auf Biegung beansprucht (Fig. 97 und 98), dann werden, entsprechend den Entfernungen l und l_1 an dem Körper verschiedene Momente zur Wirkung gelangen, welche den Körper durchzubiegen oder gänzlich zu zerstören suchen. So würde ein etwaiger Bruch in den Punkten A nach Fig. 97) durch das Moment

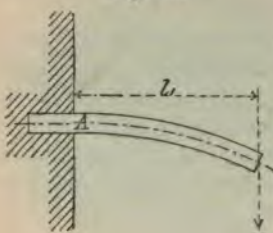
Fig. 97.



$$M = P \cdot l$$

und nach Fig. 98) durch das Moment

Fig. 98.



$$M_1 = P \cdot l_1$$

verursacht werden.

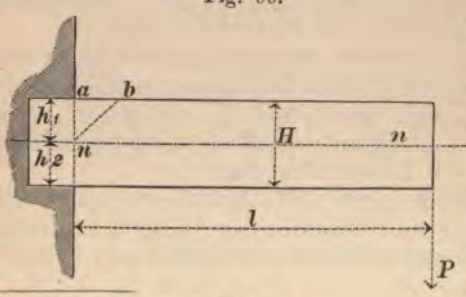
Jedes durch die Belastung eines auf Biegung beanspruchten Körpers erzeugte Moment nennt man Kraftmoment oder Moment der äufseren Kräfte.

Damit nun der Körper nicht bricht, müssen die im Innern desselben wirksam werdenden Kräfte — das sind die in den einzelnen gezogenen oder gedrückten Fasern resp. Faserschichten auftretenden Widerstände — ebenfalls ein Moment erzeugen, welches dem Momente der äufseren Kräfte, dem Kraftmomente, gleich und diesem entgegengesetzt wirksam ist.

Dieses widerstehende Moment heifst das Moment der inneren Kräfte.

Es mufs also bei einem auf Biegung beanspruchten Körper stets das Moment der äufseren Kräfte gleich sein dem Momente der inneren Kräfte.

Fig. 99.



Je gröfser nun der Abstand irgend einer Faser oder Faserschicht von der neutralen Achse ist, desto gröfser ist die Verlängerung oder Verkürzung, welche dieselbe erleidet; desto gröfser also auch die Spannung, welche sie auszuhalten hat.

*) Vergl. Seite 78.)

Diese Spannung ist ihrem Abstande von der neutralen Achse direkt proportional.

Bezeichnet man ganz allgemein mit S diejenige Spannung, welche eine Faser im Abstande 1 (dcm, cm, mm, u. s. w.) von der neutralen Achse erleidet; h_1 den Abstand der entferntesten gestreckten Faser von der neutralen Achse (Fig. 99) in irgend einem Längsschnitt eines Balkens von rechteckigem Querschnitt, so erhält man einen Wert für die Spannung in dieser Faser, wenn man die Spannung S mit ihrem Abstande multipliziert, also in dem Produkte $S \cdot h_1$. Da die Spannung in der neutralen Achse n gleich Null ist, dieselbe von n nach a aber, angestellten Versuchen entsprechend, gleichmäfsig wächst, so folgt, dafs, wenn man $a\,b = h_1$ macht und die Linie b n zieht, durch das Dreieck a b n die Spannung jeder zwischen n und a liegenden Faser dargestellt wird.

Der Inhalt des Dreiecks a b n ist aber $= \frac{1}{2} a\,b \cdot a\,n$; da man jedoch $a\,b = h_1$ gemacht hat, so wird durch a b der gröfste in der obersten Faser bestehende Spannungswert $= S \cdot h_1$ repräsentiert; setzt man diesen Wert $S \cdot h_1$ für a b ein, so wird nun durch den Inhalt des Dreiecks a b n $= \frac{1}{2} \cdot S \cdot h_1 \cdot h_1 = \frac{S \cdot h_1^2}{2}$ die Summe aller Spannungen der über n liegenden Fasern dargestellt.

Da diese Spannungen sämtlich in einer Richtung wirken, also untereinander parallel sind, so kann man die Mittlere aller dieser Spannungen im Schwerpunkte des Dreiecks a b n angreifend denken, also an einem Hebelarme $= \frac{2}{3} \cdot h_1$, wobei alsdann n als Drehpunkt angenommen wird.

Dasselbe ist mit den Fasern unterhalb der neutralen Achse n der Fall.

Die Summe aller Spannungen oberhalb der neutralen Achse ist daher: $\frac{S \cdot h_1^2}{2}$,

und unterhalb der neutralen Achse entsprechend:

$$= \frac{S \cdot h_2^2}{2}.$$

Ferner ist der Hebelarm der über n thätigen Spannungen $= \frac{2}{3} \cdot h_1$ und entsprechend derjenige der unter n thätigen Spannungen $= \frac{2}{3} \cdot h_2$; mithin das Moment der inneren Spannungen, welches dem von der Kraft P durch Ausrecken der über n liegenden Fasern erzeugten Momente entgegenwirkt

$$= \frac{S \cdot h_1^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h_1 = \frac{S \cdot h_1^3}{3} \text{ und}$$

das Moment der unter n liegenden Fasern

$$= \frac{S \cdot h_2^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot h_2 = \frac{S \cdot h_2^3}{3}.$$

Bezeichnet man die Breite des Balkens mit b, so ist das Gesamtmoment aller überhaupt im Innern des Balkens thätigen Spannungen

$$= \left(\frac{S \cdot h_1^3}{3} + \frac{S \cdot h_2^3}{3}\right) \cdot b.$$

Dieses Moment der inneren Kräfte mufs nach dem Vorhergesagten gleich sein dem Momente der äufseren Kräfte, also nach Fig. 99) $= P \cdot l$, mithin mufs

$$P \cdot l = \left(\frac{S \cdot h_1^3}{3} + \frac{S \cdot h_2^3}{3}\right) \cdot b = \tfrac{1}{3} \cdot S \cdot (h_1^3 + h_2^3) \cdot b \text{ sein.}$$

Da ferner entsprechend Fig. 99)

$H = h_1 + h_2$, und $h_1 = h_2 = \frac{1}{2} H$ ist, so folgt:

$$P \cdot l = \tfrac{1}{3} \cdot S \cdot \left\{\left(\frac{H}{2}\right)^3 + \left(\frac{H}{2}\right)^3\right\} \cdot b = \tfrac{1}{3} \cdot S \cdot \left(\frac{H^3}{8} + \frac{H^3}{8}\right) \cdot b$$

oder was dasselbe ist:

$$P \cdot l = \tfrac{1}{3} \cdot S \cdot \left(\frac{H^3}{4}\right) \cdot b = S \cdot \left(\frac{b \cdot H^3}{12}\right).$$

Der eingeklammerte Ausdruck $\left(\frac{b \cdot H^3}{12}\right)$ ist nur von der geometrischen Form des Querschnittes abhängig und ändert sich natürlich mit diesem; man nennt diesen Ausdruck das „Trägheitsmoment“ des Körpers und bezeichnet dasselbe mit J.

Es ist mithin für den rechteckigen Querschnitt:

$$P \cdot l = S \cdot J.$$

Bezeichnet man den Abstand der entferntesten Faserschicht von der neutralen Achse mit y, so ist die Spannung derselben (die gröfste, welche überhaupt im Querschnitte auftritt) $= S \cdot y$.

Es soll aber diese gröfste Spannung, oder was dasselbe ist, die zulässige Belastung, welche in einem Teile eines Körpers stattfindet, nur $\frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{4}$ derjenigen betragen, bei welcher die Grenze der vollkommenen Elastizität erreicht wird. Bezeichnet man auch hier diese zulässige Belastung wieder mit k, so mufs auch

$$S \cdot y = k, \text{ und damit } S = \frac{k}{y} \text{ sein.}$$

Setzt man diesen letzten Wert für S in die Formel $P \cdot l = S \cdot J$ ein, so folgt:

$$P \cdot l = \frac{k}{y} \cdot J = k \cdot \frac{J}{y}.$$

Den Ausdruck $\frac{J}{y}$, welcher ebenfalls nur von der geometrischen Form des Querschnittes abhängig ist, nennt man das

„Widerstandsmoment" des Querschnittes und bezeichnet dasselbe mit W; es ist daher

$$W = \frac{J}{y}.$$

Man findet demnach das Widerstandsmoment eines Querschnittes, indem man das Trägheitsmoment desselben durch den Abstand der neutralen Achse von der entferntesten Faserschicht dividiert.

Für das Widerstandsmoment eines Rechteckes ergiebt sich somit z. B.:

$J = \frac{b \cdot H^3}{12}$. wie vorstehend nachgewiesen. Ferner

$y = \frac{1}{2} H$, weil bei einem Rechteck die neutrale Achse in der Mitte der Höhe H desselben liegt. Folglich

$$W = \frac{J}{y} = \frac{\frac{1}{12} \cdot b \cdot H^3}{\frac{1}{2} \cdot H} = \frac{2 \cdot b \cdot H^3}{12 \cdot H} = \frac{b \cdot H^2}{6}.$$

Der Berechnung eines rechteckigen Balkens, welcher an einem Ende fest eingespannt und am anderen Ende durch eine Kraft P belastet ist, legt man nach dem Vorstehenden die Formel

$P \cdot l = \frac{J}{y} \cdot k$, oder was dasselbe ist:

$$P \cdot l = W \cdot k \quad \ldots \quad (20)$$

zu Grunde. Hieraus folgt:

$$W = \frac{P \cdot l}{k} \quad \ldots \quad (20a)$$

$$P = \frac{W \cdot k}{l} \quad \ldots \quad (21)$$

$$k = \frac{P \cdot l}{W} \quad \ldots \quad (22)$$

$$l = \frac{W \cdot k}{P} \quad \ldots \quad (23)$$

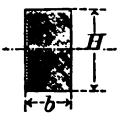
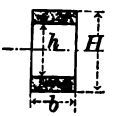
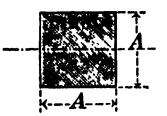
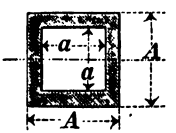
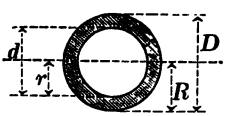
Hinsichtlich der Trägheits- und Widerstandsmomente, sowie der Art und Weise der Berechnung und Darstellung der Körper sind die auf Seite 162 und 163 befindlichen Tabellen zusammengestellt worden, aus denen die speziellen Widerstandsmomente und die einer bestimmten Belastung entsprechenden Formeln zu entnehmen sind.

Die Werte für k sind in jedem Falle der Tabelle der Festigkeitskoeffizienten der [illegible] Festigkeit, Seite 47, zu entnehmen.

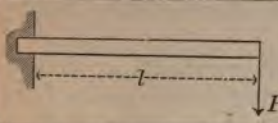
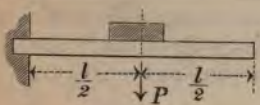
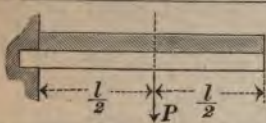
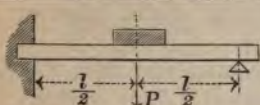
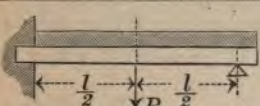
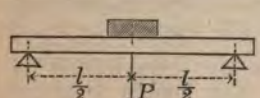
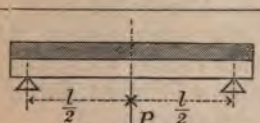
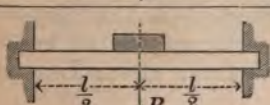
Die in der Tabelle auf Seite 162 in den einzelnen Figuren dargestellten Belastungsarten werden nach folgendermaßen:

1) Der Balken ist an einem Ende fest eingespannt — unwandelbar befestigt — und am anderen belastet.

Trägheitsmomente und Widerstandsmomente der gebräuchlichsten Querschnittsformen.

Querschnittsform.	J.	$W = \frac{J}{y}$.
	$\frac{b \cdot H^3}{12}$.	$\frac{b \cdot H^2}{6}$.
	$\frac{b}{12} \cdot (H^3 - h^3)$.	$\frac{b}{6 \cdot H} \cdot (H^3 - h^3)$.
	$\frac{A^4}{12}$.	$\frac{A^3}{6}$.
	$\frac{A^4 - a^4}{12}$.	$\frac{1}{6} \cdot \frac{A^4 - a^4}{A}$.
	$\frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$.	$\frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{\pi \cdot r^3}{4}$. $0{,}0982\, d^3$
	$\frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) =$ $\frac{\pi}{4} \cdot (R^4 - r^4)$.	$\frac{\pi}{32} \cdot \frac{D^4 - d^4}{D} =$ $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{R^4 - r^4}{R}$.
	$\frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$.	$\frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H}$.

Die verschiedenen Belastungsarten und die zur Berechnung der Tragfähigkeit dienenden zugehörigen Formeln.

Art der Belastung und Auflagerung.	Zur Berechnung dient:		
	$P = \frac{W \cdot k}{l}$	$W = \frac{P \cdot l}{k}$	$P \cdot l = W \cdot k.$
	$P = \frac{2 \cdot W \cdot k}{l}$	$W = \frac{P \cdot l}{2 \cdot k}$	$P \cdot l = 2\,W \cdot k.$
	$P = \frac{2 \cdot W \cdot k}{l}$	$W = \frac{P \cdot l}{2 \cdot k}$	$P \cdot l = 2 \cdot W \cdot k.$
	$P = \frac{16 \cdot W \cdot k}{3 \cdot l}$	$W = \frac{P \cdot 3 \cdot l}{16 \cdot k}$	$P \cdot l = \frac{16 \cdot W \cdot k}{3}$
	$P = \frac{8 \cdot W \cdot k}{l}$	$W = \frac{P \cdot l}{8 \cdot k}$	$P \cdot l = 8 \cdot W \cdot k.$
	$P = \frac{4 \cdot W \cdot k}{l}$	$W = \frac{P \cdot l}{4 \cdot k}$	$P \cdot l = 4 \cdot W \cdot k$
	$P = \frac{8 \cdot W \cdot k}{l}$	$W = \frac{P \cdot l}{8 \cdot k}$	$P \cdot l = 8 \cdot W \cdot k.$
	$P = \frac{8 \cdot W \cdot k}{l}$	$W = \frac{P \cdot l}{8 \cdot k}$	$P \cdot l = 8 \cdot W \cdot k.$
	$P = \frac{12 \cdot W \cdot k}{l}$	$W = \frac{P \cdot l}{12 \cdot k}$	$P \cdot l = 12 \cdot W \cdot k.$

Diese Art der Belastung genügt den Bedingungen der Gleichung 127). Balken, welche in anderer Weise gelagert und belastet sind, vermögen im Gegensatz zu 1) vielfach mehr zu tragen, wie folgt:

2) Der Balken ist an einem Ende unwandelbar befestigt und in der Mitte belastet; in diesem Falle trägt er das 2-fache.
3) Der Balken ist an einem Ende unwandelbar befestigt und die Last gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt; in diesem Falle trägt er ebenfalls das 2-fache.
4) Der Balken ist an einem Ende unwandelbar befestigt und liegt mit dem anderen Ende frei auf; die Last greift in der Mitte an. In diesem Falle trägt er das $^{16}/_{3}$-fache.
5) Der Balken ist an einem Ende unwandelbar befestigt und liegt mit dem anderen Ende frei auf; die Last ist gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt. In diesem Falle trägt er das 8-fache.
6) Der Balken liegt mit beiden Enden frei auf; die Last greift in der Mitte an; in diesem Falle trägt er das 4-fache.
7) Der Balken liegt mit beiden Enden frei auf; die Last ist gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt; in diesem Falle trägt er das 8-fache.
8) Der Balken ist an beiden Enden unwandelbar befestigt, die Last greift in der Mitte an; in diesem Falle trägt er ebenfalls das 8-fache.
9) Der Balken ist an beiden Enden unwandelbar befestigt, die Last gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt; in diesem Falle trägt er das 12-fache.

Um bei einem in 2 Punkten unterstützten, irgendwie belasteten Balken die Last auf einen der beiden Stützpunkte zu reduzieren, gelten allgemein folgende Regeln*):

1) Man reduziert eine Last auf einen der beiden Stützpunkte, indem man sie mit ihrer Entfernung vom anderen Stützpunkte multipliziert und das erhaltene Produkt durch die ganze Entfernung der beiden Stützpunkte dividiert.

2) Um eine Last von ihrem ursprünglichen Angriffspunkte nach einem beliebigen anderen zu verlegen, ist zu berücksichtigen, dafs stets „Kraft mal Hebelarm gleich Last mal Hebelarm“ sein mufs.

3) Die Entfernung des Bruchpunktes von einem der beiden Stützpunkte ist gleich dem Produkte aus der Entfernung der beiden Stützpunkte und dem auf den anderen Stützpunkt

*) Vergl. Kap. VI, VII und VIII.)

reduzierten Druck, dividiert durch die ganze in Wirksamkeit gewesene Last.

Beispiele:

1) Wie grofs ist das Widerstandsmoment eines Balkens von rechteckigem Querschnitt, dessen Höhe $H = 20$ cm und dessen Breite $b = 15$ cm ist?

Nach der Tabelle auf Seite 162) ist:

$$W = \frac{b \cdot H^2}{6} = \frac{15 \cdot 20^2}{6} = \frac{15 \cdot 20 \cdot 20}{6} = 1000.$$

2) Wie grofs ist das Widerstandsmoment einer runden Eisenstange von 6 cm Durchmesser?

Nach der Tabelle auf Seite 162) ist:

$$W = \frac{\pi \cdot r^3}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{4} = 21{,}195.$$

3) Welches Widerstandsmoment besitzt ein I-Eisen, wenn die Abmessungen desselben, entsprechend den Buchstaben der Skizze in der Tabelle auf Seite 162), wie folgt gewählt werden?

$H = 30$ cm; $B = 12{,}5$ cm; $h = 26$ cm; $b = 10$ cm.

Nach der genannten Tabelle erhält man:

$$W = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6\,H} = \frac{12{,}5 \cdot 30^3 - 10 \cdot 26^3}{6 \cdot 30} = 898{,}6.$$

4) Ein an einem Ende eingemauerter und an dem anderen Ende mit einer Last P beanspruchter hölzerner Balken von 400 cm Länge besitzt einen Querschnitt von $H = 20$ cm Höhe und $b = 15$ cm Breite. Wie grofs ist die Tragfähigkeit dieses Balkens, d. h. wieviel kg darf die Last P bei genügender Sicherheit betragen? ($k = 80$.)

Das Widerstandsmoment dieses Querschnittes ist bereits in Beispiel 1) zu $W = 1000$ berechnet.

Aus Formel 129) folgt demnach:

$$P = \frac{W \cdot k}{l} = \frac{1000 \cdot 80}{400} = 200\,\text{kg}.$$

5) Wie grofs darf die Last P am freien Ende dieses Balkens werden, wenn derselbe nur 250 cm lang ist?

Aus Formel 129) ergiebt sich:

$$P = \frac{W \cdot k}{l} = \frac{1000 \cdot 80}{250} = 320\ \text{kg}.\ ^*)$$

6) Welche Last P vermag der Balken aus Beispiel 4) zu tragen, wenn seine Höhe H nur 15 cm beträgt?

Das Widerstandsmoment berechnet sich nach der Tabelle auf Seite 162), da der Querschnitt des Balkens jetzt ein Quadrat ist, zu

$$W = \frac{H^3}{6} = \frac{15 \cdot 15 \cdot 15}{6} = 562{,}5.$$

Mithin nach Formel 129):

$$P = \frac{W \cdot k}{l} = \frac{562{,}5 \cdot 80}{400} = 112{,}5\ \text{kg}.\ ^{**})$$

---

*) Man ersieht aus diesen beiden Beispielen, dafs der Balken umsomehr zu tragen vermag, je kürzer er unter sonst gleichen Umständen wird.

**) Aus diesem Beispiel geht im Vergleich mit Beispiel 4) ganz deutlich hervor, wie sehr die Tragfähigkeit eines Balkens abnimmt, wenn seine Höhe verringert wird.

7) Ein Balken aus Eichenholz von rechteckigem Querschnitt, dessen Breite $b = 15$ cm beträgt, ist an einem Ende eingemauert und am anderen mit $P = 250$ kg belastet. Die Länge des Balkens sei $l = 200$ cm. Welche Höhe h erhält dieser Balken? ($k = 80$.)

Die Höhe des Balkens läfst sich nur aus dem Widerstandsmomente desselben berechnen.

Nach Formel 128) ist: $W = \frac{P \cdot l}{k}$; nach Tabelle auf Seite 162) ist: $W = \frac{b \cdot H^2}{6}$; mithin mufs $\frac{P \cdot l}{k} = \frac{b \cdot H^2}{6}$ sein. Hieraus folgt:

$$H^2 = \frac{6 \cdot P \cdot l}{k \cdot b} \text{ und damit}$$

$$H = \sqrt{\frac{6 \cdot P \cdot l}{k \cdot b}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 250 \cdot 200}{80 \cdot 15}} = \sqrt{250} = 15{,}8 \text{ cm}.$$

8) Welche Höhe H müfste der Balken aus Beispiel 7) erhalten, wenn die Last $P = 250$ kg gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt wäre?

Dem Belastungsfall 3) in der Tabelle auf Seite 163) entsprechend ist hier $P \cdot l = 2 \cdot W \cdot k$. Hieraus ergiebt sich:

$$W = \frac{P \cdot l}{2 \cdot k} = \frac{b \cdot H^2}{6} \text{ und damit}$$

$$H = \sqrt{\frac{6 \cdot P \cdot l}{2 \cdot k \cdot b}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 250 \cdot 200}{2 \cdot 80 \cdot 15}} = \sqrt{125} = 11{,}2 \text{ cm}.$$

9) Wie weit kann ein an einem Ende fest eingespannter schmiedeeiserner I-Träger frei ausladen, wenn die Belastung am freien Ende $P = 2400$ kg ist, und wenn der Träger entsprechend der Skizze in der Tabelle auf Seite 162) folgende Abmessungen erhält: $B = 9$ cm; $H = 20$ cm; $b = 8{,}1$ cm; $h = 17{,}6$ cm? ($k = 700$.)

Das Widerstandsmoment berechnet sich zu:

$$W = \frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H} = \frac{9 \cdot 20^3 - 8{,}1 \cdot 17{,}6^3}{6 \cdot 20} = 232;$$

damit folgt aus Formel 131):

$$l = \frac{W \cdot k}{P} = \frac{232 \cdot 700}{2400} = 67{,}6 \text{ cm}.$$

10) Ein schmiedeeiserner Träger von rechteckigem Querschnitt, welcher an einem Ende fest eingespannt ist und am anderen eine Last von 2000 kg tragen soll, ist zu berechnen. Die Länge des Trägers ist $= 180$ cm; die Breite verhält sich zur Höhe wie 1 : 3. Welche Abmessungen mufs man dem Träger geben?

Die Abmessungen lassen sich nur aus dem Widerstandsmomente bestimmen. Dasselbe ist nach der Tabelle auf Seite 162):

$W = \frac{b \cdot H^2}{6}$. Da nun $b = \frac{H}{3}$ sein soll, so wird

$W = \frac{H}{3} \cdot \frac{H^2}{6} = \frac{H^3}{18}$. Damit ergiebt sich aus Formel 128):

$W = \frac{H^3}{18} = \frac{P \cdot l}{k}$. Folglich: $H^3 = \frac{18 \cdot P \cdot l}{k}$ und

$$H = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot P \cdot l}{k}} = \sqrt[3]{\frac{18 \cdot 2000 \cdot 180}{750}} = \sqrt[3]{8640} = 20{,}5 \text{ cm}.$$

Da $b = \frac{H}{3}$ war, so wird jetzt $b = \frac{20{,}5}{3} = 6{,}8$ cm.

11) Wie grofs ist die Belastung eines Trägers von I-förmigem uerschnitt, wenn dessen Abmessungen, der Skizze auf Seite 162) ent-rechend, wie folgt gewählt werden: H = 30 cm; B = 12,5 cm; = 10 cm und h = 26 cm. Der Träger liegt an beiden Enden frei if, die Last ist gleichmäfsig über seine ganze Länge verteilt und die ntfernung der Unterstützungspunkte = 2 m = 200 cm? (k = 500.)

Das Widerstandsmoment des Trägers ist bereits in Beispiel 3) zu = 898,5 berechnet. Dem gegebenen Belastungsfall 7, Seite 163) ent-rechend ist

$$P \,.\, l = 8 \,.\, W \,.\, k, \text{ woraus}$$

$$P = \frac{8 \,.\, W \,.\, k}{l} \text{ folgt. Mithin:}$$

$$P = \frac{8 \,.\, 898{,}5 \,.\, 500}{200} = 17970 \text{ kg.}$$

12) Wieviel kg vermag der Träger des vorigen Beispieles zu tragen, enn die Last P in der Mitte des Trägers angreift?

Da für diesen Belastungsfall ÷ 6, Seite 163) ÷ $P \,.\, l = 4 \,.\, W \,.\, k$, so nur halb so grofs als im vorigen Beispiele ist, so wird:

$$P = \frac{17970}{2} = 8985 \text{ kg.}$$

13) Welchen Durchmesser d erhält ein schmiedeeiserner, 11 cm nger Kurbelzapfen einer Dampfmaschine von D = 30 cm Cylinder-rchmesser, wenn die Dampfspannung im Cylinder 4 Atm. beträgt?

Nimmt man den ungünstigsten Fall an, dafs der Druck nicht gleich-äfsig verteilt, sondern am äufsersten Ende des Zapfens thätig ist, so rechnet sich derselbe entsprechend dem Belastungsfall 1, Seite 163) ch der Formel

$$P \,.\, l = W \,.\, k,$$

ofür der Druck auf den Kurbelzapfen gleich dem Gesamtdrucke des ampfes auf den Kolben, d. i.

$$P = \frac{\pi \,.\, D^2}{4} \,.\, 4 = \frac{3.14 \,.\, 30 \,.\, 30}{4} \,.\, 4 = 2826 \text{ kg; } l = 11 \text{ cm;}$$

$$W = \frac{\pi \,.\, d^3}{32} \text{ und } k = 600 \text{ kg gegeben sind.}$$

Diese Werte in die Gleichung $P \,.\, l = W \,.\, k$ eingesetzt, folgt:

$$2826 \,.\, 11 = \frac{3{,}14 \,.\, d^3}{32} \,.\, 600.$$

$$d^3 = \frac{2826 \,.\, 11 \,.\, 32}{3{,}14 \,.\, 600} = 528.$$

$$d = \sqrt[3]{528} = 8{,}1 \text{ cm} = 81 \text{ mm.}$$

14) Eine Welle, welche in den 2 m = 200 cm von einander ent-nten Punkten A und B gelagert ist, trägt in einer Entfernung = 80 cm m Stützpunkte B eine Last von 3000 kg. Welchen Druck erleiden e Lagerstellen A und B; wie stark müssen die Zapfen genommen rden, und welchen Durchmesser erhält die Welle am Aufhängepunkte r Last, o h n e Berücksichtigung des Eigengewichtes?

Als Druck in den Stützpunkten erhält man:

$$P_1 = \frac{80 \,.\, 3000}{200} = 1200 \text{ kg.*)}$$

$$P_2 = \frac{120 \,.\, 3000}{200} = 1800 \text{ kg.*)}$$

*) Vergl. Seite 77, Beispiel 4).

Zur Bestimmung der Stärke des Zapfens in A nimmt man den ungünstigsten Fall an, dafs die Kraft am äufsersten Ende des Zapfens wirkt und diesen auf Biegung beansprucht. Für diesen Belastungsfall gilt die Gleichung:

$$P \,.\, l = W \,.\, k.$$

Verhält sich ferner der Durchmesser des Zapfens zur Länge desselben wie 1 : 1,5 und setzt man k 600, so wird:

$$1200 \,.\, l = \frac{\pi \,.\, d^3}{32} \,.\, 600.$$

$$1200 \,.\, l \,.\, 32 = 3{,}14 \,.\, d^2 \,.\, d \,.\, 600.$$

$$d^2 = \frac{1200 \,.\, 32}{3{,}14 \,.\, 600} \cdot \frac{l}{d} = 20{,}38 \,.\, \frac{l}{d} = 20{,}38 \,.\, 1{,}5 = 30{,}57.$$

$$d = \sqrt{30{,}57} = 5{,}5 \text{ cm} = 55 \text{ mm}.$$

Als Durchmesser des Zapfens in B erhält man:

$$d_1^2 = \frac{1800 \,.\, 32}{3{,}14 \,.\, 600} \cdot \frac{l}{d_1} = 30{,}58 \,.\, 1{,}5 = 46.$$

$$d_1 = \sqrt{46} = 6{,}8 \text{ cm} = 68 \text{ mm}.$$

Für den Durchmesser d_2 der Welle im Aufhängepunkte der Last ergiebt sich aus der Gleichung:

$$P \,.\, l = W \,.\, k$$

$$1800 \,.\, 80 = \frac{\pi \,.\, d^3}{32} \,.\, 600.$$

$$d^3 = \frac{1800 \,.\, 80 \,.\, 32}{3{,}14 \,.\, 600} = 2446.$$

$$d = \sqrt[3]{2446} = 13{,}5 \text{ cm} = 135 \text{ mm}.$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Holzbalken von rechteckigem Querschnitt, dessen Breite 200 mm und dessen Höhe 240 mm beträgt, ist an einem Ende fest eingespannt. Wie grofs darf eine am freien Ende wirkende Last P werden, wenn der Balken 1,8 m lang ist? (k = 70.)

Lösung: P = 747 kg.

2) Welche gleichmäfsig verteilte Belastung P kann derselbe Balken tragen?

Lösung: P = 1494 kg.

3) Welche Last P kann ein Holzbalken in der Mitte tragen, wenn derselbe mit seinen Enden frei aufliegt, eine Länge von 3000 mm und einen rechteckigen Querschnitt von b = 180 mm und H = 240 mm besitzt? (k = 70.)

Lösung: P = 1613 kg.

4) Welche gleichmäfsig verteilte Last trägt derselbe Balken, wenn er mit beiden Enden fest eingespannt ist? (Belastungsfall 9, Seite 163.)

Lösung: P = 4839 kg.

5) Welchen Durchmesser mufs eine runde schmiedeeiserne Stange von 2 m Länge erhalten, wenn dieselbe an einem Ende eingemauert und am anderen freien Ende mit 1500 kg belastet ist? (k = 750.)

Lösung: d = 16 cm (abgerundet).

6) Wie grofs wird der Durchmesser d eines schmiedeeisernen Zapfens, dessen Länge l = 1,5 d ist, unter der Annahme, dafs der Zapfendruck P = 3000 kg in der Mitte des Zapfens angreift? (k = 500.)

Lösung: d = 68 mm (abgerundet).

7) Ein I-Träger besitzt folgende Abmessungen: B = 10 cm; *H = 23 cm; b = 8 cm;* h = 21 cm. Er liegt an beiden Enden frei auf *ist 4 m lang.* Wie grofs kann eine über den Träger gleichmäfsig

verteilte Last werden, wenn der Träger a) aus Schmiedeeisen (k = 750); b) aus Gufseisen (k = 300) hergestellt ist?

Lösung: a) P = 5172 kg; b) P = 2068,8 kg.

8) Welche Last kann derselbe Träger in der Mitte seiner Länge tragen?

Lösung: a) P = 2586 kg; b) P = 1034,4 kg.

9) Ein an beiden Enden frei aufliegender schmiedeeiserner Träger hat eine gleichmäfsig verteilte Last von P = 13500 kg zu tragen. Die Länge sei l = 2500 mm. Wieviel Eisenbahnschienen, deren Widerstandsmoment W = 140 ist, können diesen Träger ersetzen? (k = 750.)

Lösung: 4 Stück.

10) Eine 6 m lange, mit beiden Enden frei aufliegende gufseiserne Röhre von 300 mm äufserem Durchmesser und 30 mm Wandstärke soll in der Mitte belastet werden. Wie grofs darf diese Belastung sein? (k = 300.)

Lösung: P = 3128 kg.

11) Welche gleichmäfsig verteilte Last kann ein an beiden Enden fest eingemauerter gufseiserner Träger von hohlem, rechteckigem Querschnitt tragen, wenn derselbe 2,5 m lang ist und folgende Abmessungen besitzt: B = 20 cm; H = 70 cm; b = 15 cm; h = 65 cm? (k = 400.)

Lösung: P = 125 280 kg.

12) An die Stelle einer gebrochenen schmiedeeisernen Achse, welche einen quadratischen Querschnitt von A = 10 cm Seitenlänge besafs, soll eine runde schmiedeeiserne Achse treten, welche dreifache Sicherheit gegenüber der quadratischen Achse bietet. Welchen Durchmesser d erhält die runde Achse?

Lösung*): d = 17,2 cm.

---

5) Torsions- oder Drehungsfestigkeit.

Zapfen und Wellen werden durch angehängte Lasten — Räder, Riemenscheiben u. s. w. — nicht nur auf Biegung beansprucht, sondern es haben die hierbei thätigen Kräfte auch das Bestreben, die beanspruchte Welle um ihre Achse zu verdrehen. Es werden daher die Längsfasern, welche ursprünglich geradlinig waren, eine schraubenförmig gewundene Form annehmen, wobei die äufseren Fasern gestreckt, die inneren dagegen verkürzt werden.

Die Widerstandsfähigkeit gegen das Verdrehen nimmt im allgemeinen mit der Gröfse des Querschnittes zu; jedoch nimmt die Drehungsfestigkeit eines kreisförmigen Querschnittes, nicht nur wie bei der Biegungs-Festigkeit, im direkten Verhältnis zur Gröfse des Querschnittes zu, sondern sie wächst mit der 3ten Potenz des Halbmessers oder Durchmessers der belasteten Welle.

Der Widerstand der einzelnen Fasern gegen das Verdrehen ist aber verschieden, je nachdem ihr Abstand von der Wellenmitte gröfser oder kleiner ist.

---

*) Die Widerstandsmomente müssen gleich sein! Das k der quadratischen Achse geht bei der runden Achse über in $\sqrt[3]{k}$.

Bezeichnet d den Durchmesser der Welle, so ist die Entfernung der äufsersten Faser vom Mittelpunkte $= \frac{d}{2}$; die der innersten Faser aber = Null. Nimmt man als Mittelwert den gemeinschaftlichen Abstand sämtlicher Fasern vom Mittelpunkte $= \frac{d}{4}$ an, und setzt man die zulässige Belastung der Fasern pro qcm = k, so ist der Widerstand des ganzen Querschnittes gegen das Verdrehen $= F \,.\, k = \frac{\pi \,.\, d^2}{4} \,.\, k$; mithin das statische Moment desselben

$$= \frac{\pi \,.\, d^2}{4} \,.\, k \,.\, \frac{d}{4} = \frac{\pi \,.\, d^3}{16} \,.\, k.$$

Nun wirkt aber die Kraft P stets an einem bestimmten Hebelarme (am Umfange eines Rades oder einer Riemenscheibe u. s. w.); es mufs daher das statische Moment dieser Kraft gleich dem obigen Momente gegen das Verdrehen sein.

Bezeichnet man den Hebelarm der Kraft P mit R, so folgt:

$$P \,.\, R = \frac{\pi \,.\, d^3}{16} \,.\, k \text{ und hieraus:}$$

$$P = \frac{\pi \,.\, d^3 \,.\, k}{16 \,.\, R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 132)$$

$$R = \frac{\pi \,.\, d^3 \,.\, k}{16 \,.\, P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 133)$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \,.\, P \,.\, R}{\pi \,.\, k}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 134)$$

Als zulässige Belastung pro qcm ist für k zu setzen bei

Schmiedeeisen: k = 500 — 600 kg.
Gufseisen: k = 250 — 300 „
Holz: k = 80 — 100 „

Gufsstählernen Wellen kann man das 0,8-fache des Durchmessers von gleich beanspruchten schmiedeeisernen Wellen geben.

Bei langen Transmissionswellen soll die Verdrehung der Welle pro laufenden Meter $\frac{1}{4}$ Grad nicht überschreiten und erhält man mit Rücksicht hierauf passende Durchmesser, wenn man setzt:

Für schmiedeeis. Wellen: $d = 2{,}32 \sqrt[4]{P \,.\, R} = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$ . . . 135)

„ gufseiserne „ : $d = 2{,}76 \sqrt[4]{P \,.\, R} = 14{,}1 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}$ . . . 136)

worin N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken, n die Anzahl der Umdrehungen pro Minute bezeichnet und R in Metern einzusetzen ist.

Beispiele:

1) Eine runde schmiedeeiserne Welle von 5 cm Durchmesser wird ırch eine Kraft P, welche an einem Hebelarme R = 65 cm angreift, auf rehung beansprucht. Wie grofs kann P werden, wenn k = 600 kg an- nommen wird?

Aus Formel 132) folgt:

$$P = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot k}{16 \cdot R} = \frac{3{,}14 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 600}{16 \cdot 65} = 226{,}5 \text{ kg}.$$

2) Eine schmiedeeiserne Welle von kreisförmigem Querschnitt und m Länge wird durch eine Kraft von 300 kg, welche an einem Hebel- me von 60 cm Länge angreift, auf Drehung beansprucht. Welchen urchmesser mufs diese Welle erhalten, wenn die zulässige Belastung k 500 kg angenommen wird?

Nach Formel 134) ist:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot P \cdot R}{\pi \cdot k}} = 1{,}7 \sqrt[3]{\frac{P \cdot R}{k}} = 1{,}7 \sqrt[3]{\frac{300 \cdot 60}{500}}$$

$$= 1{,}7 \cdot 3{,}3 = 5{,}6 \text{ cm} = 56 \text{ mm}.$$

Soll auf die Verdrehung Rücksicht genommen werden, so wird ıch Formel 135):

$$d = 2{,}32 \cdot \sqrt[4]{P \cdot R} = 2{,}32 \cdot \sqrt{\sqrt{300 \cdot 0{,}6}}\ ^{*})$$

$$d = 2{,}32 \cdot \sqrt{13{,}4} = 2{,}32 \cdot 3{,}7.$$

$$d = 8{,}6 \text{ cm} = 86 \text{ mm}.$$

3) An welchem Radhalbmesser R kann eine Kraft von 1000 kg ıgreifen, wenn an einer auf Drehung beanspruchten, runden schmiede- sernen Welle von 7 cm Durchmesser eine zulässige Belastung von = 550 kg gestattet ist?

Aus Formel 133) ergiebt sich:

$$R = \frac{\pi \cdot d^3 \cdot k}{16 \cdot P} = \frac{3{,}14 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 550}{16 \cdot 1000} = 37 \text{ cm} = 370 \text{ mm}.$$

4) An den Enden einer an zwei Stellen gelagerten schmiede- sernen Welle sitzen zwei Riemenscheiben von den Halbmessern R = 60 cm ıd r = 20 cm. Am Umfange der letzteren wirkt eine Kraft P = 150 kg, elche von der ersteren Scheibe aufgenommen und an irgend eine aschine abgegeben wird. Welchen Durchmesser mufs diese Welle er- ılten, wenn auf die Verdrehung keine Rücksicht genommen wird?

Es ist hier gleichgültig, welches der beiden Drehmomente zur An- endung kommt, da für den Zustand des Gleichgewichtes das Moment :r Kraft gleich dem Momente der Last sein mufs.

Es ist daher: P . R = Q . R = 150 . 20 = 3000. Folglich nach ɔrmel 134), wenn k = 500 angenommen wird:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot P \cdot R}{\pi \cdot k}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3000}{3{,}14 \cdot 500}} = 3{,}2 \text{ cm} = 32 \text{ mm}.$$

5) Wie grofs wird der Durchmesser einer gufseisernen Welle, wenn eselbe 27 Pferdestärken bei 90 Umdrehungen in der Minute über- agen soll?

Aus Formel 136) folgt:

$$d = 14{,}1 \cdot \sqrt[4]{\frac{N}{n}} = 14{,}1 \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{27}{90}}}\ ^{*}) = 10{,}4 \text{ cm} = 104 \text{ mm}.$$

---

*) Vergl. Seite 43 und 44).

Übungsbeispiele:

1) Welchen Durchmesser d erhält eine schmiedeeiserne runde Welle, welche bei 100 Umdrehungen in der Minute 16 Pferdestärken übertragen soll?

Lösung: $d = 76$ mm.

2) Welche Kraft P in kg kann eine gufseiserne Welle von 100 mm Durchmesser übertragen, wenn die Kraft an einer Riemenscheibe von 100 cm Durchmesser wirkt und auf die Verdrehung der Welle keine Rücksicht genommen werden soll? (k 1 300.)

Lösung: $P = 177$ kg.

3) Welchen Durchmesser d mufs eine runde schmiedeeiserne Welle erhalten, wenn dieselbe durch ein Zahnrad von 65 cm Halbmesser mit 500 kg Zahndruck in Umdrehung versetzt wird? ($k = 500$.)

Lösung: $d = 69$ mm.

4) Wie grofs wird der Durchmesser der schmiedeeisernen Kurbelwelle einer Winde, wenn die Handkurbel 400 mm lang ist und an derselben 2 Arbeiter mit je 15 kg wirken? ($k = 600$.)

Lösung: $d = 22$ mm.

Ist das drehende Moment P . R oder der Quotient $\frac{N}{n} = \frac{\text{Pferdestärken}}{\text{Umdrehungszahl}}$ bekannt, so kann man sich mit Vorteil zur schnellen und angenäherten Bestimmung der Wellendurchmesser der folgenden Tabelle bedienen.

Tabelle der Durchmesser d schmiedeeiserner Transmissionswellen, berechnet nach der Formel:

$$d = 2{,}32 \sqrt[4]{P \cdot R} = 12 \sqrt[4]{\frac{N}{n}}.$$

d cm	P . R	$\frac{N}{n}$	d cm	P . R	$\frac{N}{n}$	d cm	P . R	$\frac{N}{n}$
3,0	2,8	0,004	9,0	226	0,32	15	1740	2,43
3,5	5,1	0,007	9,5	280	0,39	16	2253	3,16
4,0	8,8	0,012	10,0	344	0,48	17	2871	4,04
4,5	14,1	0,020	10,5	418	0,59	18	3608	5,06
5,0	21,5	0,030	11,0	503	0,71	19	4479	6,25
5,5	31,5	0,044	11,5	601	0,84	20	5499	7,72
6,0	44,5	0,063	12,0	713	1,00	21	6685	9,36
6.5	61,4	0,086	12,5	839	1,17	22	8239	11,3
7,0	82,5	0,116	13,0	982	1,37	23	9619	13,5
7,5	109	0,152	13,5	1142	1,63	24	11144	16,0
8,0	141	0,196	14,0	1320	1,88	25	13423	18,8
8,5	179	0,251	14,5	1519	2,13	26	15707	22,1

Der Durchmesser der Welle aus Übungsbeispiel 1) ist aus dieser Tabelle ohne weiteres, wie folgt, zu entnehmen: Der Quotient $\frac{N}{n}$ wird $= \frac{16}{100} = 0{,}160$. Diesem Werte liegt in der Tabelle der Wert 0,152 am

hsten, und entspricht dem letzteren ein Wellendurchmesser d = 7,5 cm
5 mm. Die Aufgabe verlangt 76 mm.

Ist wie in Beispiel 2) das Drehungsmoment P . R = 300 . 0,6 = 180
annt, so giebt die Tabelle als nächstliegendes Drehmoment den
rt 179 an, welchem ein Wellendurchmesser von d = 8,5 cm = 85 mm
spricht. Die Aufgabe verlangt 86 mm.

Um bei gegebenen Transmissions-Wellendurchmessern die
orderlichen Lagerentfernungen zu kennen, bedient man sich
gender Tabelle, in welcher d den Wellendurchmesser in
n und l die zulässige weiteste Entfernung zweier Lager-
tten, ebenfalls in mm, bezeichnet:

d =	30	40	50	60	70	80	90	100	110
l ≤	1700	1800	1900	2000	2100	2200	2300	2400	2500

Demnach müfste eine Welle von z. B. 70 mm Durchmesser in einer
tfernung von 2100 mm gelagert werden; eine solche von 105 mm
rchmesser vielleicht in einer Entfernung von 2450 mm u. s. w.

Um bei Transmissions-Anlagen nicht zu grofse Wellen-
irken zu erhalten, wird man gut thun, die Umdrehungszahl
r Wellen möglichst grofs zu nehmen. Erfordern die zu
treibenden Arbeitsmaschinen keine bedeutenden Geschwindig-
iten, so kann man die Hauptwellenleitung etwa 100—150
mdrehungen machen lassen, für den Betrieb schnell laufender
rbeitsmaschinen — Holzbearbeitungsmaschinen — kann die
ellenleitung 250—350 Umdrehungen machen.

Bei langen Wellenleitungen ist in den meisten Fällen am
nde weniger Kraft zu übertragen und können deshalb die
zten Wellenstücke schwächer gehalten werden. Z. B.: Eine
ellenleitung macht 120 Umdrehungen in der Minute und
d im Ganzen 60 Pferdestärken zu übertragen; von diesen
Pferdestärken werden am Anfang 30, in der Mitte 10 und
Ende 20 Pferdestärken abgegeben. Alsdann wird das erste
ellenstück auf 60, das zweite auf 10 + 20, und das letzte
20 Pferdestärken berechnet.

Bei Herstellung eines derartigen Wellenstranges von ver-
iedenen Durchmessern der Wellen, werden die Kupplungen
artig ausgeführt, dafs entweder die eine Hälfte nach der
rkeren, die andere nach der schwächeren Welle ausgebohrt
d, oder man dreht das Ende der stärkeren Welle auf den
rchmesser der schwächeren Anschlufswelle, um einfache
pplungen verwenden zu können. Die Kupplungen sind
glichst dicht bei den Lagerstellen anzubringen.

Neunzehntes Kapitel.

Mechanische Arbeit.

1) Arbeit im Allgemeinen.

Wird irgend ein Widerstand durch den Zug oder den Druck einer Kraft auf einem bestimmten Wege überwunden, so wird durch diese Kraft eine gewisse Arbeit verrichtet, welche mechanische Arbeit genannt wird.

Beim Heben von Lasten auf gewisse Höhen, beim Fortschaffen von Lasten auf Strafsen, Eisenbahnen, Flüssen, bei Überwindung der Reibung, beim Bearbeiten von Metallen, Hölzern u. s. w. wird mechanische Arbeit geleistet.

Der Widerstand selbst kann durch eine Kraft ersetzt werden, welche diesem Widerstande gleich ist, aber in entgegengesetzter Richtung wirkt. Die Richtung des Widerstandes und die Richtung seines Weges fallen alsdann in eine gerade Linie zusammen.

Bringen irgend zwei Kräfte die gleiche Wirkung auf einen Körper hervor, d. h. üben die Kräfte denselben Zug oder denselben Druck aus, so können trotzdem ihre Leistungen in der nämlichen Zeit sehr verschieden sein.

Wird durch die eine Kraft der Körper auf die doppelte Höhe gehoben oder legt der Körper infolge der Einwirkung dieser Kraft den doppelten Weg zurück, so wird auch die Wirkung oder Leistung dieser Kraft doppelt so grofs sein, als die Leistung der anderen.

Oder soll z. B. durch dieselbe Kraft vermittelst ein und derselben Pumpe doppelt so viel Wasser gefördert werden, so mufs der Kolben der Pumpe auch den doppelten Weg zurücklegen, d. h. der Kolben mufs den doppelten Hub machen, um die zweifache Arbeit zu verrichten.

Soll mithin die Leistung oder die Arbeit einer Kraft bestimmt werden, so ist aufser der Gröfse dieser Kraft auch noch der Weg, auf welchem sie thätig war oder einen Widerstand überwunden hat, in Rechnung zu bringen.

Bei stets gleichbleibendem Widerstande ist die Arbeit sowohl diesem Widerstande als auch dem von demselben zurückgelegten Wege direkt proportional, d. h. ist die Wirkung einer Kraft von 10 kg auf einem Wege von 1 m $= 10 . 1 = 10$,

so ist die Wirkung

einer Kraft von 20 kg auf einem Wege von 2 m $= 20 . 2 = 40$,
„ „ „ 10 „ „ „ „ „ 3 „ $= 10 . 3 = 30$,
„ „ „ 20 „ „ „ „ „ 3 „ $= 20 . 3 = 60$,

u. s. w.

Die Leistung oder Arbeit einer Kraft wird stets ırch das Produkt aus Kraft und Weg ausgedrückt, ıd wächst daher mit der Kraft und dem Wege zugleich.

Die Arbeit bleibt dieselbe, gleichviel ob sie in kürzerer er längerer Zeit verrichtet wurde.

Gleiche mechanische Arbeiten werden verrichtet, ınn z. B. 4 kg zugleich oder 4 mal je 1 kg auf 1 m Höhe hoben werden, oder wenn 1 kg auf 4 m Höhe oder 1 kg mal auf 1 m Höhe gehoben wird, denn in jedem dieser ille sind die Produkte aus Kraft und Weg ein- ıder gleich.

Um die beiden Faktoren der Arbeit — Kraft und Weg - in Zahlen auszudrücken, kann man sich beliebiger Ein- iten: des Kilogramms, des Pfundes, Meters, Fufses u. s. w. dienen.

Allgemein gebraucht man jedoch das Kilogramm als rafteinheit und das Meter als Wegeinheit.

Die Arbeit, welche eine Kraft von 1 kg auf einem Wege ın 1 m Länge verrichtet, nimmt man in der Mechanik all- emein als Einheit der mechanischen Arbeit an; eselbe wird „Kilogramm-Meter oder auch Meter- ilogramm“ genannt und kgm geschrieben.

Unter einer Arbeit von 80 kgm ist daher die Wirkung ı verstehen, welche durch eine Kraft von

80 kg auf einer Weglänge von 1 m
oder von 1 „ „ „ „ „ 80 „
„ „ 20 „ „ „ „ „ 4 „
„ „ 40 „ „ „ „ „ 2 „ u. s. w.

ervorgebracht wurde.

Wird das Pfund als Krafteinheit und der Fufs als Weg- inheit angenommen, so heifst das Mafs der verrichteten echanischen Arbeit „Fufspfund“.

Bezeichnet man den Zug oder den Druck, welcher durch ine Kraft auf einen Körper ausgeübt wird mit P, den Weg, uf welchem diese Kraft thätig ist oder einen Widerstand berwindet mit s, und die mechanische Arbeit, welche hier- ei verrichtet wird mit A, so ist:

$$A = \text{Kraft mal Weg} = P \cdot s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 137)$$

$$\text{woraus folgt: } P = \frac{A}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 138)$$

$$\text{und } s = \frac{A}{P} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 139)$$

Will man an Stelle des Weges, welchen die Kraft zurück- gt, die Geschwindigkeit treten lassen, mit welcher sich der örper unter dem Einflusse der Kraft bewegt, so ist zu be- cksichtigen, dafs für die Zeiteinheit — eine Sekunde —

der zurückgelegte Weg s gleich der Geschwindigkeit v (Kap. I, Seite 56) ist, mithin die in **einer Sekunde** verrichtete Arbeit

$$A = P \cdot v \cdot 1 = P \cdot v \text{ wird} \quad 140)$$

Demnach ist für t Sekunden: $A = P \cdot v \cdot t$ . . . . . 141)

woraus folgt: $P = \frac{A}{v \cdot t}$ . . . . . 142)

$$v = \frac{A}{P \cdot t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 143)$$

$$t = \frac{A}{P \cdot v} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 144)$$

Beispiele:

1) Welche Arbeit ist erforderlich, um eine Last von 1200 kg auf eine Höhe von 9 m zu heben?

Nach Formel 137) ist:

$$A = P \cdot s = 1200 \cdot 9 = 10800 \text{ kgm.}$$

2) Durch einen Kraftmesser hat man beobachtet, dafs die Zugkraft eines Pferdes auf horizontaler Bahn 65 kg beträgt. Welche Arbeit verrichtet das Pferd, wenn es 7500 m ziehend zurücklegt?

Aus Formel 137) folgt:

$$A = P \cdot s = 65 \cdot 7500 = 487\,500 \text{ kgm.}$$

3) Welche Arbeit wird von einem Hammer verrichtet, welcher ein Gewicht von 90 kg und eine Hubhöhe von 0,5 m hat?

Aus Formel 137) erhält man:

$$A = P \cdot s = 90 \cdot 0{,}5 = 45 \text{ kgm.}$$

4) Welche Last kann durch einen Fahrstuhl befördert werden, wenn derselbe durch eine Arbeitsleistung von 1200 kgm auf eine Höhe von 30 m gehoben werden soll?

Aus Formel 138) erhält man:

$$P = \frac{A}{s} = \frac{12000}{30} = 400 \text{ kg.}$$

5) Welche Arbeit wird verrichtet, wenn 10 Hektoliter Getreide drei Stockwerke hoch gehoben werden? Ein Hektoliter Getreide wiege durchschnittlich 80 kg und jedes Stockwerk sei 4 m hoch.

Nach Formel 137) ist:

$$A = P \cdot s = 10 \cdot 80 \cdot 3 \cdot 4 = 9600 \text{ kgm.}$$

6) Auf welche Höhe kann eine Last von 1000 kg durch eine Arbeitsleistung von 12000 kgm gehoben werden?

Nach Formel 139) folgt:

$$s = \frac{A}{P} = \frac{12000}{1000} = 12 \text{ m.}$$

7) Ein Wagen von 1200 kg Gewicht soll mit einer Geschwindigkeit von 1,5 m in der Sekunde fortbewegt werden. Welche mechanische Arbeit ist hierzu erforderlich?

Nach Formel 140) ist:

$$A = P \cdot v = 1200 \cdot 1{,}5 = 1800 \text{ kgm.}$$

8) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich ein Körper, wenn an demselben durch eine Kraft von 125 kg während einer Zeit von 10 Sekunden eine Arbeit von 15000 kgm verrichtet wird?

Nach Formel 143) erhält man:

$$v = \frac{A}{P \cdot t} = \frac{15000}{125 \cdot 10} = 12 \text{ m.}$$

9) Auf welche Weglänge kann ein Wagen durch eine Arbeitsleistung 1500 kgm fortgezogen werden, wenn dieser Fortbewegung ein derstand von 75 kg entgegentritt?

Nach Formel 139) erhält man:

$$s = \frac{A}{P} = \frac{1500}{75} = 20 \text{ m}.$$

10) Durch einen Arbeiter soll Erde mit einer Schaufel auf eine tlere Höhe von 1,3 m geworfen werden. Wieviel Erde kann der- be in einer Stunde ausheben, wenn die Leistung des Arbeiters zu gm und das spezifische Gewicht der Erde zu 1,6 kg angenommen rden?

Das Gewicht, welches der Arbeiter pro Sekunde heben kann, ist:

$$\frac{2}{1{,}3} = 1{,}54 \text{ kg};$$

hin in 1 Stunde:

$$1{,}54 \cdot 60 \cdot 60 = 5544 \text{ kg}.$$

1 cbm Erde wiegt aber $1{,}6 \cdot 1000 = 1600$ kg;

glich wird die Erdmenge, welche der Arbeiter in 1 Stunde hebt:

$$\frac{5544}{1600} = 3{,}46 \text{ cbm}.$$

---

2) Arbeit in gegebener Zeit.

In fast allen Fällen, in denen es sich um die Verrichtung echanischer Arbeit handelt, wird jedoch verlangt, dafs eine wisse Arbeit auch in einer bestimmten Zeit verrichtet wird; ist daher bei Bestimmung der Wirkungsgröfse auch noch e Zeitdauer zu berücksichtigen. Es genügt hierbei die rbeit zu kennen, welche in einer Sekunde geleistet wird, man dann auch die Arbeit für jeden anderen Zeitraum rechnen kann.

Die auf eine Sekunde bezogene Arbeit einer Kraft nnt man den Effekt derselben.

Zur Bestimmung der in der Zeiteinheit verrichteten echanischen Arbeit gröfserer Motoren, der Dampf- und asserkräfte, wendet man in der Regel eine gröfsere Arbeits- heit an, nämlich 75 kgm, welche Einheit man = einer erdestärke setzt, nachdem man durch Kraftmessungen tgestellt hat, dafs die mittlere Zugkraft eines Pferdes, nn es den Tag über 8 bis 10 Stunden arbeiten und in Sekunde einen Weg von 1 m zurücklegen soll, gleich er solchen von 75 kg ist.

Soll mithin die in der Zeiteinheit verrichtete mechanische beit in Pferdestärken ausgedrückt werden, so ist diese Ar- t durch 75 zu dividieren und geht Formel 137) über in:

$$A = \frac{P \cdot s}{75} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 145)$$

Wird die von einer Kraft verrichtete Arbeit auf eine lere Zeit als die Sekunde, z. B. auf die Minute, bezogen,

so ist diese Arbeit stets auf die Zeiteinheit — eine Sekunde — zurückzuführen. Da eine Minute 60 Sekunden hat, geht Formel 137) über in:

$$A = \frac{P \cdot s}{60} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 146)$$

Soll diese letzte Arbeit in Pferdestärken umgerechnet werden, so wird entsprechend:

$$A = \frac{\frac{P \cdot s}{60}}{75} = \frac{P \cdot s}{60 \cdot 75} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 147)$$

Tritt eine Kraft in Thätigkeit, so soll gewöhnlich durch diese Kraft ein derselben entgegentretender Widerstand auf einem gewissen Wege überwunden werden. Wie schon vorstehend bemerkt, kann dieser Widerstand durch eine Kraft ersetzt werden, welche demselben gleich aber entgegengesetzt gerichtet ist, wenn ihre Angriffspunkte in eine gerade Linie fallen oder überhaupt gleiche Wege zurückgelegt werden.

Man erhält mithin auch die Arbeit des Widerstandes, wenn man die Gröfse desselben mit seinem vom Angriffspunkte zurückgelegten Wege multipliziert.

Da in dem erwähnten Falle der Widerstand bei der Wirkung der Kraft denselben Weg zurücklegen mufs, wie die Kraft selbst, so mufs auch das Produkt aus Kraft und Weg, gleich sein dem Produkte aus Widerstand oder Last und Weg.

Fallen die Angriffspunkte nicht in eine gerade Linie, so kann der Widerstand oder die Last — wie z. B. bei Hebemaschinen — bedeutend gröfser sein als die Kraft; es ist aber alsdann der Weg, welchen der Widerstand oder die Last in derselben Zeit zurücklegt, um so viel mal kleiner, als der Widerstand gröfser ist wie die Kraft. Jedoch mufs in diesem Falle stets die Arbeit der Kraft, gleich sein der Arbeit des Widerstandes oder der Arbeit der Last.

Dieses Gesetz, welches in der Mechanik von aufserordentlicher Bedeutung ist, findet in folgenden Worten Ausdruck:

Die Arbeit der bewegenden Kraft ist gleich der Arbeit der widerstehenden Kraft; oder:

Das Produkt aus Kraft und Weg ist gleich dem Produkte aus Last oder Widerstand und Weg.

Bezeichnet man mit

s den Weg der Kraft P;

s_1 den Weg der Last Q, so ist:

$$P \cdot s = Q \cdot s_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 148)$$

woraus folgt: $$P = \frac{Q \cdot s_1}{s} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 149)$$

$$Q = \frac{P \cdot s}{s_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 150)$$

$$s = \frac{Q \cdot s_1}{P} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 151)$$

$$s_1 = \frac{P \cdot s}{Q} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 152)$$

Beispiele:

1) Vermittelst eines Dampfkrahnes soll in einer Minute eine Last von 12000 kg auf eine Höhe von 2,5 m gehoben werden; wieviel Pferdestärken mufs die zum Betriebe des Krahnes erforderliche Dampfmaschine besitzen?

Nach Formel 137) ist die zu verrichtende Arbeit:

$$A = P \cdot s = 12000 \cdot 2{,}5 = 30000 \text{ kgm},$$

und die Arbeit in Pferdestärken nach Formel 147):

$$A = \frac{P \cdot s}{60 \cdot 75} = \frac{30000}{60 \cdot 75} = 6{,}6 \text{ Pferdestärken}.$$

2) Durch eine Dampfmaschine sollen in der Stunde 72 cbm Wasser auf eine Höhe von 50 m gehoben werden. Welche Arbeit mufs die Maschine verrichten?

Wassermenge, welche pro Sekunde gehoben werden soll $= \frac{72}{3600} = 0{,}02$ cbm.

Gewicht des Wassers, da 1 cbm = 1000 kg wiegt, $= 0{,}02 \cdot 1000 = 20$ kg.

Mithin nach Formel 137) die zu verrichtende Arbeit:

$$A = P \cdot s = 20 \cdot 50 = 1000 \text{ kgm}.$$

3) Welche Arbeit erfordert eine einfach wirkende Pumpe zum Betriebe, wenn der Kolben 25 Hübe pro Minute macht und bei jedem Hube 12 l Wasser auf eine Höhe von 15 m gehoben werden?

Die Wassermenge, welche die Pumpe pro Sekunde liefert, ist, da 1 l Wasser = 1 kg wiegt:

$$\frac{25 \cdot 12}{60} = 5 \text{ kg};$$

folglich die zum Heben dieser Wassermenge erforderliche Arbeit nach Formel 137):

$$A = P \cdot s = 15 \cdot 5 = 75 \text{ kgm} = 1 \text{ Pferdestärke}.$$

4) Bei einer anderen Pumpe sei der Durchmesser des Kolbens 0,4 m, die Hubhöhe 1,5 m. Das Wasser soll auf eine Höhe von 12 m gehoben werden, wobei der Kolben in einer Minute 16 Hübe macht. Wie viel Pferdestärken sind zum Betriebe der Pumpe notwendig?

Da der Kolben eine Fläche $= \frac{\pi \cdot d^2}{4} = \frac{3{,}14 \cdot 4^2}{4}$ qdcm besitzt, so hat das zu hebende Wasserquantum ein Gewicht von:

$$\frac{3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 15}{4} = 188{,}4 \text{ kg}.$$

Die bei einem Hube pro Minute zu leistende Arbeit ist mithin nach Formel 137):

$$A = P \cdot s = 188{,}4 \cdot 12 = 2260{,}8 \text{ kgm};$$

folglich bei 16 Hüben pro Minute:

$$2260{,}8 \cdot 16 = 36172{,}8 \text{ kgm},$$

und somit die Arbeitsleistung in Pferdestärken nach Formel 147):

$$A = \frac{P \cdot s}{60 \cdot 75} = \frac{36172{,}8}{60 \cdot 75} = 8{,}04 \text{ Pferdestärken}.$$

5) Auf den Kolben einer Dampfmaschine wirkt ein Dampfdruck von rund 5000 kg. Wieviel Pferdestärken liefert die zugehörige Maschine, ohne Rücksicht auf Reibung, wenn der einfache Kolbenweg 0,6 m beträgt und die Kurbelwelle 50 Umdrehungen pro Minute macht?

Es ist der Druck auf den Kolben = 5000 kg und der Weg des Kolbens pro Sekunde

$$= \frac{2 \,.\, 0{,}6 \,.\, 50}{60} = 1 \text{ m.} \quad \text{(Formel 7.)}$$

Folglich nach Formel 137) die zu verrichtende Arbeit:

$$A = P \,.\, s = 5000 \,.\, 1 = 5000 \text{ kgm,}$$

oder nach Formel 145):

$$A = \frac{P \,.\, s}{75} = \frac{5000}{75} = 66{,}6 \ldots \text{ Pferdestärken.}$$

6) Auf jedem qcm eines Dampfkolbens, welcher 1200 qcm Fläche hat, lastet ein Druck von 5 kg. Wieviel Pferdestärken liefert die zugehörige Maschine ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse, wenn der Kolbenhub 0,8 m beträgt und die Kurbelwelle 40 Umdrehungen pro Minute macht?

Der Gesamtdruck auf die Kolbenfläche beträgt:

$$1200 \,.\, 5 = 6000 \text{ kg;}$$

der Weg des Kolbens pro Sekunde $= \frac{2 \,.\, 0{,}8 \,.\, 40}{60} = 1{,}06$ m. (Formel 7.)

Nach Formel 137) ist demnach die zu verrichtende Arbeit:

$A = P \,.\, s = 6000 \,.\, 1{,}06 = 6360$ kgm oder nach Formel 145):

$$A = \frac{P \,.\, s}{75} = \frac{6360}{75} = 84{,}8 \text{ Pferdestärken.}$$

7) Eine Dampfmaschine besitzt einen Kolbendurchmesser von 30 cm und einen Kolbenhub von 0,7 m. Die Kurbelwelle mache 50 Umdrehungen pro Minute und betrage der Dampfdruck auf den Kolben 6 Atmosphären. Wie grofs wird die Arbeit dieser Maschine in Pferdestärken, ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse?

Die Kolbenfläche ergiebt sich nach der Tabelle im Anhange zu 706,86 qcm, mithin wird der Druck auf den Kolben

$$= 706{,}86 \,.\, 6 = 4241{,}2 \text{ kg.}$$

Der Kolbenweg pro Sekunde wird nach Formel 7)

$$= \frac{2 \,.\, 0{,}7 \,.\, 50}{60} = 1{,}17 \text{ m.}$$

Mithin nach Formel 145) die geleistete Arbeit:

$$A = \frac{P \,.\, s}{75} = \frac{4241{,}2 \,.\, 1{,}17}{75} = 66{,}2 \text{ Pferdestärken.}$$

8) Bei einer einfach wirkenden Pumpe sei der Durchmesser des Kolbens = 0,5 m, die Hubhöhe = 1,6 m. Das Wasser soll auf eine Höhe von 12 m gehoben werden, wenn der Kolben in einer Minute 20 Hübe macht. Wieviel Pferdestärken sind hierzu erforderlich?

Das zu hebende Wasserquantum hat ein Gewicht von

$$\frac{3{,}14 \,.\, 5^2 \,.\, 16}{4} = 314 \text{ kg.}$$

Nach Formel 146) ist mithin die pro Sekunde zu verrichtende Arbeit:

$$A = \frac{P \,.\, s}{60} = \frac{314 \,.\, 12 \,.\, 20}{60} = 1256 \text{ kgm,}$$

oder in Pferdestärken:

$$A = \frac{1256}{75} = 17 \text{ Pferdestärken (abgerundet).}$$

9) Am Umfange einer Riemenscheibe von 0,5 m Halbmesser wirkt eine Kraft P = 60 kg. Welche Arbeit leistet diese Kraft, wenn die Scheibe in einer Minute 200 Umdrehungen macht?

Nach Formel 4) ist der Weg der Kraft in einer Sekunde:

$$s = v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 200}{60} = 10{,}46 \text{ m}.$$

Mithin nach Formel 137) die verrichtete Arbeit:

$$A = P \cdot s = 60 \cdot 10{,}46 = 627{,}60 \text{ kgm},$$

oder nach Formel 145), in Pferdestärken ausgedrückt:

$$A = \frac{P \cdot s}{75} = \frac{627{,}60}{75} = 8{,}37 \text{ Pferdestärken}.$$

10) Eine Maschine, welche eine Pumpe treibt, arbeitet mit 10 Pferdestärken; der Pumpenkolben hat eine Geschwindigkeit von 0,8 m pro Sekunde. Wie grofs ist der Druck auf den Kolben?

Aus Formel 148) erhält man:

$P, s = Q \cdot s_1$, oder wenn man die 10 Pferdestärken in kgm ausdrückt:*)

$$10 \cdot 75 \cdot 1 = Q \cdot 0{,}8,$$

$$Q = \frac{75 \cdot 10}{0{,}8} = 937{,}5 \text{ kg}.$$

11) Ein Riemen überträgt 70 kg Zug. Wie grofs mufs der Halbmesser der zugehörigen Scheibe genommen werden, wenn dieselbe bei 80 Umdrehungen pro Minute 5 Pferdestärken abgeben soll?

Bezeichnet man den Halbmesser der Scheibe mit R, so erhält man nach Formel 148):

$$P \cdot s = Q \cdot s_1 \text{ oder}$$

$$5 \cdot 75 \cdot 1 = 70 \cdot \frac{2 \cdot R \cdot 3{,}14 \cdot 80}{60},$$

$$R = \frac{5 \cdot 75 \cdot 60}{70 \cdot 2 \cdot 3{,}14 \cdot 80} = 0{,}639 \text{ m}.$$

12) Eine Maschine von 30 Pferdestärken macht 40 Umdrehungen in der Minute. Auf der Kurbelwelle befindet sich eine Riemenscheibe von 2 m Durchmesser, durch welche eine Transmissionswelle angetrieben wird, die 160 Umdrehungen pro Minute machen soll. Wie grofs ist der Riemenzug, und welchen Durchmesser mufs die Scheibe auf der Transmissionswelle erhalten?

Für den Riemenzug folgt aus Formel 148):

$$P \cdot s = Q \cdot s_1; \text{ d. h.}$$

$$30 \cdot 75 \cdot 1 = \frac{Q \cdot 3{,}14 \cdot 2 \cdot 40}{60},$$

$$Q = \frac{30 \cdot 75 \cdot 60}{3{,}14 \cdot 2 \cdot 40} = 537 \text{ kg}.$$

Den Durchmesser der Riemenscheibe auf der Transmissionswelle erhält man nach Formel 104) wie folgt:

Es ist: $a \cdot m = b \cdot n$, oder: $2 \cdot 40 = b \cdot 160$;

mithin: $b = 0{,}5$.

13) Eine Eisenhobelmaschine läuft vorwärts, d. h. wenn der Stahl schneidet, mit einer Geschwindigkeit von 20 cm; rückwärts dagegen, wenn der Stahl aufser Thätigkeit gesetzt ist, mit einer solchen von 35 cm. Wenn das Gewicht des Bettes nebst dem Arbeitsstück 1000 kg beträgt, und der durch das Hobeln hervorgerufene Widerstand zu 400 kg angenommen wird, wie grofs ist dann die Arbeit beim Vorgange und beim

---

*) 1 Pferdestärke = 75 kgm, mithin:
10 Pferdestärken = 75 . 10 = 750 kgm.

Rückgange unter der Voraussetzung, dafs ein Druck in senkrechter Richtung von dem Stahle während seiner Thätigkeit nicht hervorgebracht wurde?

Der Reibungswiderstand des Bettes beim Lehrgange beträgt nach Formel 100), wenn der Reibungskoeffizient f zu 0,07 angenommen wird:

$$1000 \cdot 0{,}07 = 70 \text{ kg};$$

mithin der Gesamtwiderstand während des Schneidens:

$$70 + 400 = 470 \text{ kg}.$$

Die Arbeit pro Sekunde während des Rückganges ist $= 70 \cdot 0{,}35 = 24{,}5$ kgm;
„ „ „ „ „ „ Vorganges ist $= 470 \cdot 0{,}2 = 94{,}0$ „
folglich sind zum Betriebe dieser Maschine erforderlich:

Beim Rückgange $\frac{24{,}5}{75} = 0{,}33$ Pferdestärken und

„ Vorgange $\frac{94{,}0}{75} = 1{,}25$ Pferdestärken.

14) Eine Last von 500 kg soll auf eine schiefe Ebene hinaufgezogen werden, deren Basis 30 m und deren Höhe 6 m beträgt. Welche Kraft ist hierzu erforderlich, wenn dieselbe parallel zur Basis der schiefen Ebene gerichtet ist?

Weg der Kraft P = Basis der schiefen Ebene = 30 m = s;
„ „ Last Q = Höhe „ „ „ = 6 m = s_1.
Nach Formel 149) erhält man:

$$P = \frac{Q \cdot s_1}{s} = \frac{500 \cdot 6}{30} = 100 \text{ kg}.$$

15) Durch eine Kraft von 40 kg soll eine Last von 600 kg auf eine schiefe Ebene hinaufgezogen werden, deren Höhe 1 m beträgt; die Kraft ist parallel zur Länge der schiefen Ebene gerichtet. Welche Länge erhält die schiefe Ebene?

Weg der Kraft P = Länge der schiefen Ebene = s;
„ „ Last Q = Höhe „ „ „ = 1 m = s_1.
Nach Formel 151) erhält man:

$$s = \frac{Q \cdot s_1}{P} = \frac{600 \cdot 1}{40} = 15 \text{ m}.$$

16) Welcher gröfste Druck kann mit einer Schraubenpresse ausgeübt werden, wenn die Ganghöhe der Schraube 13 mm, und die an einem 0,4 m langen Hebelarme angreifende Kraft 15 kg beträgt?
Weg der Kraft P = Umfang des Kreises vom Durchmesser $d = \pi \cdot d = s$;
„ „ Last Q = Steigung der Schraube = s_1.
Nach Formel 150) ist:

$$Q = \frac{P \cdot s}{s_1} = \frac{15 \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}8}{0{,}013} = 2898{,}46 \text{ kg}.$$

Übungsbeispiele:

1) Eine Wassermenge von 500 kg Gewicht hat ein Gefälle von 7 m. Welche Arbeit leistet diese Wassermenge?

Lösung: A = 3500 kgm.

2) Wie grofs ist die Arbeit einer Lokomotive, deren Zugkraft = 750 kg und deren Geschwindigkeit = 16 m ist?

Lösung: A = 12000 kgm.

3) Durch eine Arbeitsleistung von 84 kgm soll ein Wagen, welcher seiner Fortbewegung einen Widerstand von 40 kg entgegensetzt, fortgezogen werden. Mit welcher Geschwindigkeit wird sich der Wagen bewegen?

Lösung: v = 2,1 m.

4) Durch eine einfach wirkende Pumpe sollen in der Minute) Liter Wasser auf eine Höhe von 8 m gehoben werden. Welche beit in Pferdestärken ist hierzu erforderlich?

Lösung: A = 0,746 Pferdestärken.

5) Ein Wasserlauf mit einem Gefälle von 7 m und einer Wasserıge von 24 cbm pro Minute, soll zum Betriebe einer Turbine benützt rden. Wie grofs ist die Arbeit der Wasserkraft in Pferdestärken?

Lösung: A = 37,33 Pferdestärken.

6) Wieviel Pferdestärken mufs die Lokomotive eines Eisenbahnges entwickeln, wenn das Gewicht des Zuges zu 130 Tonnen (1 Tonne 1000 kg), die Geschwindigkeit zu 12 m und der gesamte Widerstand 800 kg angenommen wird?

Lösung: A = 128 Pferdestärken.

7) Eine Pumpe, deren Kolbengeschwindigkeit 0,9 m pro Sekunde trägt, wird durch eine Dampfmaschine von 12 Pferdestärken betrieben. ie grofs ist der Druck auf den Kolben der Pumpe?

Lösung: Q = 1000 kg.

8) Durch eine Dampfmaschine von 20 Pferdestärken soll vertttelst einer Pumpe Wasser 30 m hoch gehoben werden. Welche assermenge kann durch diese Maschine auf die betreffende Höhe bedert werden?

Lösung: Q = 50 kg = 50 Liter.

9) Es soll eine Dampfmaschine von 50 Pferdestärken gebaut werden, Kolbenhub betrage 600 mm; die Umdrehungszahl der Kurbel sei pro Minute und die mittlere Dampfspannung 6 Atmosphären. Welchen rchmesser D mufs der Dampfcylinder erhalten?

Lösung: D = 22,3 cm.

10) Durch eine Riemenscheibe von 1,5 m Durchmesser, welche 50 ıdrehungen pro Minute macht, wird ein Riemenzug von 120 kg ausibt. Welche Arbeit in Pferdestärken kann durch diese Riemenscheibe ertragen werden?

Lösung: A = 6,28 Pferdestärken.

11) Ein Schleifstein von 1,5 m Durchmesser macht 90 Umdrehungen) Minute; der durch Anpressen des abzuschleifenden Gegenstandes vorgebrachte Widerstand betrage 30 kg. Wie grofs ist die zum Beebe des Schleifsteines erforderliche Arbeitsleistung?

Lösung: A = 2,826 Pferdestärken.

12) Auf der Kurbelwelle einer Dampfmaschine von 40 Pferdestärken eine Riemenscheibe von 2 m Durchmesser aufgekeilt, durch welche Riemenzug von 200 kg übertragen werden soll. Wie viel Umdrehgen mufs die Kurbelwelle machen?

Lösung: 143,3 Umdrehungen.

---

3) Arbeit lebender Wesen.

Das Arbeitsvermögen lebender Wesen ist nicht allein i Individuen verschiedener Gattungen, sondern auch bei einer d derselben Gattung sehr verschieden; es hängt dasselbe von r Konstitution, dem Alter, der Gesundheit, der Nahrung, r Gewohnheit u. s. w. ab. Es sind daher bei der Berechng *stets solche* Wesen vorausgesetzt, welche den mittleren

Grad von Stärke und Behendigkeit besitzen, und an die zu verrichtende Arbeit gewöhnt sind.

Das Arbeitsvermögen eines Tieres hängt von der Kraft, der Geschwindigkeit und Arbeitszeit desselben ab, und werden bei einer mittleren Kraft, Geschwindigkeit und täglichen Arbeitszeit am gröfsten ausfallen.

Je gröfser die Kraft ist, welche ein Geschöpf ausübt, desto kleiner wird die Geschwindigkeit werden, und umgekehrt.

Für die Beurteilung der Wirkungen tierischer Motoren ist die tägliche Leistung von besonderer Bedeutung. Ermittelt man dieselbe für die verschiedenen tierischen Kräfte, und vergleicht sie mit den Kosten, welche durch die Unterhaltung, Verzinsung und Amortisation entstehen, so erhält man ein Mafs zur Vergleichung der Werte arbeitender Tiere unter einander.

Die Art und Weise, wie Menschen und Tiere mechanische Arbeiten verrichten, ist sehr verschieden. Die Menschen arbeiten mit den Händen oder mit den Füfsen, oder mit beiden zugleich; die Tiere nur mit den Füfsen.

Wie schon vorstehend gesagt, erreicht die tägliche Arbeit nur bei Annahme gewisser Mittelwerte ihren höchsten Betrag, vermindert sich aber sofort, sobald Kraft, Geschwindigkeit oder Zeit verändert werden, vorausgesetzt, dafs das arbeitende Geschöpf nicht über das gewöhnliche Mafs angestrengt und ermüdet werde.

Bei Annahme von 8 Stunden mittlerer Arbeitszeit ergeben sich durch Erfahrung die in folgender Tabelle zusammengestellten Werte für die mittlere Kraft und die mittlere Geschwindigkeit, welche den höchsten Werten der täglichen Arbeit entsprechen:

Art der Arbeit und Bezeichnung des lebenden Wesens	Mittlere Kraft kg	Mittlere Geschwindigkeit m	Arbeit pro Sekunde kgm
Der Mensch beim Zug	15	0,8	12,0
„ „ am Hebel	6	1,1	6,6
„ „ an der Kurbel	10	0,8	8,0
„ „ am Göpel	12	0,6	7,2
„ „ am Tretrad	12	0,7	8,4
Das Pferd beim Zug am Wagen . . .	56	1,3	72,8
„ „ „ „ „ Göpel	46	0,9	41,4
Der Ochse beim Zug am Wagen . . .	60	0 8	48,0
„ „ „ „ „ Göpel	60	0,6	36,0
Das Maultier beim Zug am Wagen . .	50	1,1	55,0
„ „ „ „ „ Göpel. . .	30	0,9	27,0
Der Esel beim Zug am Wagen	36	0,8	28,8
„ „ „ „ „ Göpel	14	0,8	11,2

Bezeichnet man mit P die mittlere Kraft, mit v die mittlere Geschwindigkeit, mit t die mittlere Zeit, so findet man nach *Gerstner* die Kraft P_1, welche ein lebendes Wesen bei irgend einer Geschwindigkeit v_1 und der Zeitdauer t_1 ausüben kann, durch die Formel:

$$P_1 = P \cdot \left(2 - \frac{v_1}{v}\right) \cdot \left(2 - \frac{t_1}{t}\right) \quad \ldots\ldots\ldots 153)$$

Beispiele:

1) Welche Kraft kann ein Mensch bei 0,9 m Geschwindigkeit und einer Arbeitszeit von 5 Stunden ausüben, wenn die mittlere Arbeitszeit zu 8 Stunden und die mittlere Kraft zu 14 kg angenommen werden?

Nach Formel 153) ist:

$$P_1 = P \cdot \left(2 - \frac{v_1}{v}\right) \cdot \left(2 - \frac{t_1}{t}\right) = 14 \cdot \left(2 - \frac{0{,}9}{0{,}8}\right) \cdot \left(2 - \frac{5}{8}\right) = 16{,}8 \text{ kg}.$$

2) Wie grofs ist die Zugkraft eines Pferdes, welches im schweren Zuge täglich 8 Stunden mit einer Geschwindigkeit von 0,8 m arbeitet?

Nach Formel 153) ist:

$$P_1 = P \cdot \left(2 - \frac{v_1}{v}\right) \cdot \left(2 - \frac{t_1}{t}\right) = 56 \cdot \left(2 - \frac{0{,}8}{1{,}3}\right) \cdot \left(2 - \frac{8}{8}\right) = 77{,}54 \text{ kg}.$$

3) Mit einer Bauwinde werden in gröfseren Zwischenräumen schwere Lasten aufgezogen. Die gesamte tägliche Arbeitszeit beträgt nur 5 Stunden und wird die Kurbel mit nur 0,5 m Geschwindigkeit umgedreht. Welche Kraft wird von einem Arbeiter ausgeübt?

Nach Formel 153) ist:

$$P_1 = 10 \cdot \left(2 - \frac{0{,}5}{0{,}8}\right) \cdot \left(2 - \frac{5}{8}\right) = 18{,}9 \text{ kg}.$$

4) Nutzarbeit und Nebenarbeit.

Bei Bestimmung der Wirkungsgröfse der Kräfte ist zu berücksichtigen, dafs ein gewisser Teil der Arbeit durch Bewegungshindernisse, als Reibung u. s. w., verloren geht. Soll daher eine bestimmte Arbeit verrichtet werden, so ist dieselbe um so viel gröfser zu veranschlagen, als durch die Bewegungshindernisse beansprucht wird.

Wird vermittelst einer Pumpe Wasser gehoben, so wird durch die Reibung des Pumpenkolbens im Cylinder, durch die Reibung des Wassers in den Rohrleitungen u. s. w. die zum Betriebe der Pumpe erforderliche Arbeitsgröfse nicht nur gleich dem Produkte aus dem Gewichte der gehobenen Wassermenge und der Förderhöhe, sondern um einen gewissen Wert gröfser sein.

Ebenso entspricht die aus dem Drucke auf den Kolben, dem Kolbenhube und der Umdrehungszahl berechnete Arbeit einer Dampfmaschine bei weitem nicht der wirklichen nutzbaren Arbeit, da der vielfachen Hindernisse wegen die von der

Schwungradwelle zu entnehmende Arbeit ebenfalls weit geringer ausfällt, als die aus den genannten Angaben berechnete Wirkungsgröfse.

Der Teil der Arbeitsgröfse, welcher den gewünschten nutzbaren Effekt hervorbringt, wird Nutzarbeit oder Nutzeffekt genannt, wogegen der durch die allgemeinen Bewegungshindernisse, Reibung, Luftwiderstand, Stöfse u. s. w. verlorene Teil mit dem Namen Nebenarbeit oder Nebeneffekt bezeichnet wird.

Nutzeffekt und Nebeneffekt zusammengenommen geben den Totaleffekt eines Motors an.

Das Verhältnis des Nutzeffektes einer Maschine zu deren Totaleffekt wird als Wirkungsgrad der Maschine bezeichnet; es entsteht mithin die Gleichung:

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{Nutzeffekt}}{\text{Totaleffekt}}.$$

Man drückt auch oft den Nutzeffekt in Prozenten der Totalarbeit aus; z. B.: Die Totalarbeit einer Maschine betrage 15 Pferdestärken, die Nutzarbeit jedoch nur 12; demnach ist der Wirkungsgrad $= \frac{12}{15} = 0{,}8$; mithin der Nutzeffekt $= 0{,}80 = \frac{80}{100} = 80\,\%$ des Totaleffektes.

Durch zahlreiche Versuche und Messungen hat man die Wirkungsgrade verschiedener Maschinen, namentlich der Betriebsmaschinen, zu ermitteln gesucht. Wenn auch hierdurch nur Mittelwerte erlangt wurden, so ist die Kenntnis derselben doch notwendig, um die Leistung und Güte einer Maschine beurteilen zu können.

Bei Dampfmaschinen guter Ausführung und Konstruktion ist als Wirkungsgrad zu nehmen:

Für kleine Maschinen = 0,50.
„ mittlere „ = 0,60.
„ grofse „ = 0,70.

Als Dampfspannung ist stets diejenige des Dampfes im Kessel in Rechnung zu setzen.

Man teilt die Dampfmaschinen in solche mit und ohne Expansion ein.

Im ersteren Falle sperrt man den Dampf ab, wenn der Dampfkolben erst einen Teil des Cylinders durchlaufen hat. Der im Cylinder eingeschlossene Dampf beginnt nun sich auszudehnen — zu expandieren — und treibt den Kolben bis zum Ende seines Hubes, wobei die Spannung des Dampfes infolge der Ausdehnung immer geringer wird.

Bei den Dampfmaschinen ohne Expansion tritt während *des ganzen* Kolbenlaufes Dampf hinter den Kolben und behält

erselbe so immer die gleiche Spannung; es geht bei diesen laschinen die Arbeit, welche der Dampf infolge seiner xpansion verrichten könnte, vollständig verloren.

Da bei den Expansionsdampfmaschinen der Dampfdruck ch in jedem Augenblicke ändert, so bietet die Berechnung erselben vielfache Schwierigkeiten und ist in der Folge nur uf solche Maschinen Rücksicht genommen, welche mit voller üllung — ohne Expansion — arbeiten.

Zur Orientierung über die Wirkungsgröfse anderer otoren, namentlich der Wasserräder, ist nachstehende Tabelle egeben:

Art des Rades	Gefälle H Meter	Wassermenge Q.-cbm	Wirkungs-Grad
berschlächtiges Wasserrad . . .	7—12	0,05—0,8	0,70—0,75
	2,5—7	0,06—0,7	0,50—0,70
ückschlächtiges „	2,5—8	0,09—1,3	0,60—0,70
haufelrad m. Coulisseneinlauf . .	2,5—4,6	0,30—2,4	0,60—0,70
„ „ Überfalleinlauf . .	1,5—2,5	0,12—2,5	0,60—0,65
ropfrad m. Durchfallschütze . . .	0,5—2,0	0,12—3,0	0,40—0,50
onceletrad	0,5—1,7	0,12—3,7	0,60—0,65
nterschlächtiges Wasserrad . . .	0,3—1,0	0,12—5,0	0,30—0,35

Beispiele:

1) Zum Betriebe eines Wasserrades stehen pro Sekunde 1,5 cbm asser bei einem Gefälle von 5 m zur Verfügung. Man hat durch essung gefunden, dafs die von diesem Wasserrade gelieferte Nutzarbeit Pferdestärken beträgt. Mit wie viel Prozent Nutzeffekt arbeitet ses Rad?

Die Totalarbeit beträgt, da 1,5 cbm Wasser 1500 kg wiegen, nach rmel 145):

$$A = \frac{P \cdot s}{75} = \frac{1500 \cdot 5}{75} = 100 \text{ Pferdestärken.}$$

Der Wirkungsgrad ist demnach $= \frac{\text{Nutzarbeit}}{\text{Totalarbeit}} = \frac{50}{100} = 0{,}5;$

thin der Nutzeffekt $= 0{,}50 = \frac{50}{100} = 50\,\% =$ der halben Totalarbeit.

2) Der Kolbendurchmesser einer Dampfmaschine sei = 30 cm und Kolbenhub = 80 cm; die Kurbel mache 50 Umdrehungen pro Minute. Dampfkessel wird Dampf von 4 Atm. Überdruck erzeugt. Wie grofs an die Nutzarbeit dieser Maschine angenommen werden?

Der Druck auf den Kolben ist:

$$\frac{3{,}14 \cdot 30^2}{4} \cdot 4 = 2826 \text{ kg.}$$

Die totale Arbeit pro Sekunde beträgt nach Formel 137):

$$A = P \,.\, s = \frac{2826 \,.\, 0{,}8 \,.\, 2 \,.\, 50}{60} = 3768 \text{ kgm oder nach Formel 145):}$$

$$A = \frac{P \,.\, s}{75} = \frac{3768}{75} = 50 \text{ Pferdestärken.}$$

Nimmt man den Wirkungsgrad zu 0,6 an, so ergiebt sich der Nutzeffekt zu:

$$0{,}6 \,.\, 50 = 30 \text{ Pferdestärken.}$$

3) Dieselbe Dampfmaschine soll eine Nutzarbeit von 36 Pferdestärken liefern. Wie viel Umdrehungen mufs dann die Schwungradwelle machen?

Da sich die Umdrehungszahl der Welle oder die Geschwindigkeit des Kolbens in demselben Verhältnisse steigern mufs, wie die Arbeit vermehrt wird, so folgt:

$$36 : 30 = x : 50.$$

$$x = \frac{36 \,.\, 50}{30} = 60 \text{ Umdrehungen.}$$

4) Zum Betriebe einer Turbine steht eine Wasserkraft von 4 m Gefälle und 0,8 cbm Wassermenge pro Sekunde zur Verfügung. Wie grofs ist die Nutzarbeit in Pferdestärken, wenn der Wirkungsgrad der Turbine zu 0,65 angenommen wird?

Die Gesamtarbeit beträgt nach Formel 137):

$$A = P \,.\, s = 1000 \,.\, 0{,}8 \,.\, 4 = 3200 \text{ kgm;}$$

mithin die Arbeit in Pferdestärken nach Formel 145):

$$A = \frac{P \,.\, s}{75} = \frac{3200}{75} = 42{,}66 \text{ Pferdestärken.}$$

Bei einem Wirkungsgrade von 0,65 erhält man demnach den Nutzeffekt zu:

$$42{,}66 \,.\, 0{,}65 = 27{,}73 \text{ Pferdestärken.}$$

Übungsbeispiele:

1) Wie grofs ist der Nutzeffekt eines Wasserrades in Pferdestärken bei einem Gefälle von 8 m und einer Wassermenge von 0,3 cbm pro Sekunde, wenn der Wirkungsgrad zu 0,6 angenommen wird?

Lösung: Nutzeffekt = 19,2 Pferdestärken.

2) Ein Wasserlauf, mit einem Gefälle von 5 m und einer Wassermenge von 20 cbm pro Minute, soll zum Betriebe einer Turbine benützt werden. Wie grofs ist die Arbeit der Wasserkraft in Pferdestärken und wie grofs ist der Nutzeffekt der Turbine, wenn der Wirkungsgrad derselben zu 0,7 angenommen wird?

Lösung: Arbeit der Wasserkraft = 22,22 Pferdestärken.
Nutzeffekt der Turbine = 15,55 „

3) Eine Dampfmaschine von 400 mm Kolbendurchmesser und 750 mm Hub arbeitet mit einer Dampfspannung von 5,5 Atmosphären. Die Anzahl der Umdrehungen betrage 120 pro Minute. Welchen Nutzeffekt in Pferdestärken entwickelt diese Maschine, wenn der Wirkungsgrad zu 0,7 angenommen wird?

Lösung: Nutzeffekt = 193,48 Pferdestärken.

4) Durch eine einfach wirkende Pumpe sollen in der Minute 800 Liter Wasser auf eine Höhe von 15 Meter gehoben werden. Welche Arbeit in Pferdestärken ist hierzu erforderlich und wie grofs ist die Nutzarbeit, wenn der Wirkungsgrad zu 0,65 angenommen wird?

Lösung: Gesamtarbeit = 2,66 Pferdestärken.
Nutzarbeit = 1,73 „

5. Arbeit der Reibung.

a) Gleitende Reibung.

Wird ein Körper über einen anderen fortbewegt, so macht sich zwischen beiden ein Widerstand bemerkbar, welcher Reibung genannt wird, und über welchen bereits in Kap. 14, Seite 121), die erforderlichen Angaben gemacht sind. Zieht man nun noch den Weg in Betracht, längs welchem die zwischen zwei Körpern auftretende Reibung als Widerstand thätig ist, so findet man nach Vorstehendem die Arbeit der Reibung, wenn man deren Gröfse in kg mit diesem Wege multipliziert.

Bezeichnet man, wie früher, mit

R die Gröfse der auftretenden Reibung in kg;
N den Normaldruck in kg;
f den Reibungskoeffizienten;
A die mechanische Arbeit der Reibung in kgm;
s den Weg in m, welchen der eine Körper während seiner Bewegung über den anderen in einer Sekunde zurücklegt, so war nach Formel 100):

$$R = f \,.\, N.$$

Multipliziert man den Wert f . N mit dem Wege s, so erhält man die Arbeit der Reibung in kgm:

$$A = f \,.\, N \,.\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 154)$$

b) Zapfenreibung.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen unter a) berechnet sich die Arbeit der Zapfenreibung, wenn man den Halbmesser des Zapfens noch mit r (Fig. 100) und die Umdrehungszahl des Zapfens in der Minute mit n bezeichnet, folgendermafsen:

Der Weg s, welchen die Reibung hier bei einer Umdrehung des Zapfens zurücklegt, ist gleich dem Umfange des Zapfens, also $= 2 \,.\, r \,.\, \pi$. Dieser Weg wird von dem Zapfen einer Minute n mal, also in einer Sekunde $\frac{n}{60}$ mal zurückgelegt; mithin wird der Weg in einer Sekunde $= \frac{2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, n}{60}$*), und da bei der Zapfenreibung die Gröfse der Reibung ebenfalls $= f \,.\, N$ war, so folgt für die Arbeit der Zapfenreibung:

$$A = f \,.\, N \,.\, \frac{2 \,.\, \pi \,.\, r \,.\, n}{60} = 0{,}105 \,.\, f \,.\, N \,.\, r \,.\, n \quad \ldots \quad 155)$$

---

*) *Vergl. Formel 4.)*

Setzt man für f . N den gleichen Wert $\frac{P \cdot a}{r}$ aus Formel 103) ein, so erhält man:

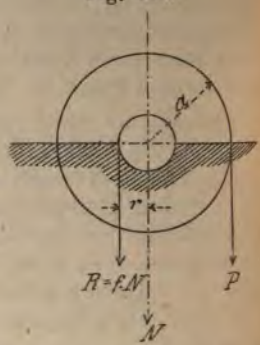
$$A = 0{,}105 \cdot \frac{P \cdot a}{r} \cdot r \cdot n = 0{,}105 \cdot P \cdot a \cdot n \quad \ldots \quad 156)$$

Beispiele:

1) Ein mit Eisen beschlagener und mit 1000 kg belasteter Schlitten, soll ohne Anwendung von Schmiermaterial auf einer Holzbahn 2,5 m weit gezogen werden. Welche Arbeit ist hierzu erforderlich, wenn f = 0,42 angenommen wird?

Nach Formel 154) ergiebt sich:
A = f . N . s = 0,42 . 1000 . 2,5 = 1050 kgm.

Fig. 100.



2) Welche Arbeit ist erforderlich, um einen auf sehr glatter Schneebahn gleitenden Schlitten, welcher mit 400 kg belastet ist, 200 m weit fortzuziehen, wenn f = 0,038 angenommen wird?

Nach Formel 154) ist:
A = f . N . s = 0,038 . 400 . 200 = 3040 kgm.

3) Ein Schwungrad, dessen Gewicht mit Welle 1800 kg wiegt, ist in Lagern von 0,13 m Durchmesser gelagert und macht 60 Umdrehungen in einer Minute. Wie grofs ist die durch die Reibung dem Schwungrade entzogene Arbeit, wenn f = 0,06 angenommen wird?

Nach Formel 155) ist:
A = 0,105 . f . N . r . n = 0,105 . 0,06 . 1800 . 0,065 . 60.
A = 44,2 kgm = 0,59 Pferdestärken.

4) Eine horizontal gelagerte Transmissionswellenleitung von 0,1 m Durchmesser hat ein Gewicht von 6000 kg und ist ohne Berücksichtigung der Reibung imstande, bei 50 Umdrehungen in der Minute 20 Pferdestärken abzugeben. Wieviel Arbeit verliert die Welle durch Reibung, wenn f = 0,05 gesetzt wird?

Nach Formel 155) ist:
A = 0,105 . f . N . r . n = 0,105 . 0,05 . 6000 . 0,05 . 50.
A = 78,75 kgm = 1,05 Pferdestärken.

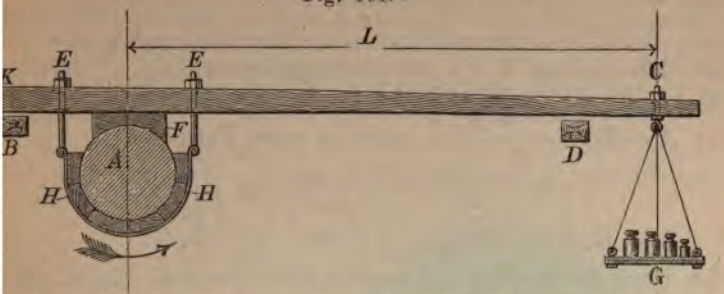
Aus Formel 155) ist ersichtlich, dafs die Arbeit der Zapfenreibung gleichzeitig mit dem Zapfendrucke, dem Zapfenhalbmesser und der Umdrehungszahl zunimmt. Es ist daher eine in der Praxis stehend gewordene Regel, bei sich drehenden Maschinenteilen den Zapfendruck durch grofse Gewichte — Zahnräder, Riemenscheiben, Kupplungen — nicht übermäfsig zu vermehren.

Auch werden die Zapfen nur so stark als unbedingt notwendig gemacht, um den Halbmesser r möglichst klein zu halten. Die Umdrehungszahl wird ebenfalls, wenn nicht besondere Verhältnisse es bedingen, möglichst niedrig angenommen.

Die Arbeit der Reibung kann mit Vorteil dazu benützt *werden, um* die von einer Dampfmaschine, einem Wasser*rade u. s. w.* in Wirklichkeit geleistete Arbeit zu ermitteln.

an bedient sich hierzu des aus Fig. 101) ersichtlichen Appa-
tes, welcher nach seinem Erfinder der Prony'sche Zaum
nannt wird.

Fig. 101.



Derselbe besteht aus einem kreisförmig ausgeschnittenen
olzstücke F, welches auf einer Welle A, deren Arbeitsgröfse
tersucht werden soll, aufsitzt, sowie aus mehreren kleineren,
ch der Welle zu ausgerundeten Holzstücken, welche die
elle von unten umschliefsen. Ein Stahlband umfafst die
teren Holzstücke und ist an den Enden mit Schraubenbolzen
rsehen, welche durch den Hebel CK dringen und durch
hraubenmuttern mehr oder weniger angezogen werden können.
n Ende des Hebels CK befindet sich eine Wagschale, welche
r Aufnahme von Gewichten dient.

Wird die Welle A in der Richtung des Pfeiles in
ewegung gesetzt, so wird dieselbe infolge der Reibung das
ebelstück AC emporheben. Um dieses zu verhindern, be-
tet man die Wagschale durch Gewichte und sucht nun, teils
rch Veränderung dieser Gewichte, teils durch Anziehen oder
iften der Muttern E, den Balken CK in horizontaler Lage
erhalten, so dafs derselbe mit keinem der Balken B und D
Berührung kommt. Ist auf diese Weise die Umdrehungs-
hl, welche die gebremste Welle annehmen soll, erreicht, so
bt die Gröfse der zwischen den Sätteln und der Welle
ttfindenden Reibung die Kraft an, welche die Welle an
rem Umfange bei der betreffenden Umdrehungszahl auf andere
aschinen zu übertragen imstande ist.

Für die horizontale Lage des Hebels wird das in der
agschale befindliche Gewicht mit der in der Umdrehungs-
htung wirkenden Reibung am Wellenumfange im Gleich-
wichte sein.

Bezeichnet man den am Wellenumfange der Bewegung
tgegentretenden Reibungswiderstand mit R, den Halbmesser
r Welle mit r, das Gewicht in der Wagschale mit Einschlufs
s *auf den Punkt* C reduzierten eigenen Gewichtes des Zaumes

mit G, die Länge des Hebelarmes AC mit L, so folgt für den Gleichgewichtszustand:

$$R \cdot r = G \cdot L \text{ oder}$$

$$R = \frac{G \cdot L}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 157)$$

Bezeichnet man noch mit n die Umdrehungszahl der Welle pro Minute und mit v die Umfangsgeschwindigkeit derselben, so ist, wenn man Gleichung 157) mit v multipliziert:

$$A = R \cdot v = \frac{G \cdot L \cdot v}{r}, \text{ oder da nach Formel 4)}$$

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot n}{60} \text{ ist, auch:}$$

$$A = R \cdot v = \frac{G \cdot L \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot n}{60 \cdot r} = \frac{2 \cdot L \cdot \pi \cdot n}{60} \cdot G \quad \ldots\ldots 158)$$

die durch die Reibung aufgezehrte Arbeit oder die Nutzarbeit, welche die Welle bei gleicher Umdrehungszahl auf andere Arbeitsmaschinen übertragen kann.

Wird die Nutzarbeit in Pferdestärken ausgedrückt, so geht Formel 158) über in:

$$A = \frac{2 \cdot L \cdot \pi \cdot n}{60 \cdot 75} \cdot G = 0{,}00139 \cdot L \cdot n \cdot G \quad \ldots 159)$$

Wird bei Bestimmung der von einer Maschine ausgeübten Arbeitsleistung stets derselbe Apparat benützt, so dafs L stets unverändert bleibt, so wird auch der Wert $\frac{2 \cdot \pi \cdot L}{60 \cdot 75}$ unverändert bleiben. Nimmt man z. B. die Hebellänge L für alle Versuche zu 2,5 m an, so geht Formel 159) über in:

$$A = 0{,}003491 \cdot n \cdot G \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 160)$$

Bei Anwendung des Apparates ist Folgendes zu beachten:

1) Der durch die Schraubenbolzen E, E ausgeübte Druck mufs während der Dauer des Versuches fortwährend durch Zu- und Losdrehen der Muttern derartig reguliert werden, dafs eine möglichst gleichförmige Bewegung der Welle erreicht wird.

2) Durch das Zu- und Losdrehen der Schraubenmuttern werden Veränderungen in der Gröfse der Reibung stattfinden; der Hebel wird sich infolgedessen auf- und niederbewegen. Um dieses zu verhindern, müssen Vorkehrungen getroffen werden, welche nur eine geringe Bewegung des Hebels aus der horizontalen Lage gestatten.

3) Bei fortgesetzten Bremsversuchen wird durch die Reibung eine Erhitzung der Sättel stattfinden; es ist deshalb für möglichst gute Schmierung durch Seifenwasser zu sorgen.

Beispiele:

1) Es ist vermittelst eines Bremszaumes die Nutzarbeit eines *Wasserrades zu* bestimmen, welches für gewöhnlich mit 8 Umdrehungen

ifen soll. Der Hebelarm des Zaumes ist = 3 m; das Gewicht in der agschale = 250 kg.

Nach Formel 159) ist:

$A = 0{,}00139 \cdot L \cdot n \cdot G = 0{,}00139 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 250 = 8{,}34$ Pferdestärken.

2) Um die Nutzarbeit der auf Seite 180, Beispiel 6) berechneten ampfmaschine kennen zu lernen, wird dieselbe unter Anwendung eines emszaumes, dessen Hebellänge 3 m beträgt, gebremst. Das Gewicht r Wagschale, das auf den Anhängepunkt der Wagschale reduzierte ewicht des Hebels und das auf die Wagschale aufgelegte Gewicht be- ng 330 kg, um die erforderlichen 40 Umdrehungen zu erzielen. Wie ofs ist die Nutzarbeit?

Nach Formel 159) ist:

$A = 0{,}00139 \cdot L \cdot n \cdot G = 0{,}00139 \cdot 3 \cdot 40 \cdot 330 = 55{,}044$ Pferdestärken.

Der Wirkungsgrad ist mithin:

$$\frac{55{,}044}{84{,}8} = 0{,}649 = \frac{65}{100} = 65\,\%.$$

---

6) Arbeitsvermögen in Bewegung befindlicher Körper.

(Lebendige Arbeit.)

Denkt man sich einen Körper vom Gewichte P durch inen Weg s frei herabfallend,*) und hat der Körper hierbei ine Endgeschwindigkeit v erreicht, so ist diese Endgeschwindig- eit nach der auf Seite 66) gegebenen Formel:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot s}$$

welcher Gleichung g = 9,81 m, also gleich der Fall- eschleunigung ist.

Aus der vorstehenden Gleichung folgt:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot s \text{ und damit: } s = \frac{v^2}{2 \cdot g}.$$

Die mechanische Arbeit A eines sich senkenden Gewichtes t aber gleich dem Produkte aus Gewicht und Weg, in diesem alle also:

$$A = P \cdot s.$$

etzt man an Stelle dieses s den Gleichwert $\frac{v^2}{2 \cdot g}$, so erhält an nun:

$$A = P \cdot \frac{v^2}{2 \cdot g} = \frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 161)$$

Der Wert $\frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g}$ giebt an, welche Arbeit auf den Körper nwirken mufste, um ihn aus dem Zustande der Ruhe in den er Bewegung überzuführen und ihm dabei eine Geschwindig- eit v zu erteilen. Die ganze Arbeit ist somit auf die Über- indung des Trägheitsvermögens und auf die Bewegung des örpers, also nicht auf die Überwindung eines

*) *Vergl. Kap. IV*, Seite 65.)

Widerstandes, verwandt worden. Sie ist gewissermafsen in dem Körper angesammelt, um erforderlichen Falles von demselben wieder abgegeben werden zu können.

Diese Abgabe wird eintreten, wenn der Körper einen Widerstand überwinden mufs; sie wird so lange währen, bis der Körper seine Geschwindigkeit verloren hat.

Man nennt die in einem Körper aufgespeicherte Arbeitsmenge $\frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g}$, welche er also wieder abzugeben imstande ist, die lebendige Arbeit des Körpers.

Beispiele:

1) Welche Arbeit ist erforderlich, um einen Wagen, dessen Gewicht 5000 kg beträgt, aus dem Zustande der Ruhe in eine Geschwindigkeit von 5 m zu versetzen, wenn von allen Bewegungswiderständen abgesehen wird?

Nach Formel 161) ist:

$$A = \frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g} = \frac{5000 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 9{,}81} = 6371{,}05 \text{ kgm.}$$

2) Wie grofs ist die im Wasser enthaltene Arbeit, wenn dasselbe durch einen Kanal von 1,5 qm Querschnitt fliefst und die mittlere Geschwindigkeit des Wassers 0,8 m beträgt?

Nach Formel 161) ist:

$$A = \frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g} = \frac{1200 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8}{2 \cdot 9{,}81} = 39{,}14 \text{ kgm.}$$

3) Der Ring eines Schwungrades habe ein Gewicht von 5000 kg und einen Durchmesser von 4 m. Die Umdrehungszahl des Rades sei 80 in der Minute. Wie grofs ist die vom Ringe aufgenommene und wieder abzugebende Arbeit?

Die Umfangsgeschwindigkeit ist nach Formel 4):

$$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60} = \frac{3{,}14 \cdot 4 \cdot 80}{60} = 16{,}76 \text{ m;}$$

mithin die Arbeit nach Formel 161):

$$A = \frac{P \cdot v^2}{2 \cdot g} = \frac{5000 \cdot 16{,}76 \cdot 16{,}76}{2 \cdot 9{,}81} = 71585 \text{ kgm.}$$

Übungsbeispiele:

1) Das Bett einer Hobelmaschine habe ein Gewicht von 600 kg, die Geschwindigkeit mit welcher sich das Bett bewegt betrage 0,1 m; der Reibungskoeffizient sei = 0,44. Welche Arbeit ist zur Bewegung des Bettes erforderlich?

Lösung: A = 26,4 kgm.

2) Ein Wasserrad, dessen Gewicht mit Welle 12000 kg beträgt, ist in Lagern von 0,18 m Durchmesser gelagert und macht 6 Umdrehungen in einer Minute. Wie grofs ist die von der Zapfenreibung aufgezehrte Arbeit, wenn der Reibungskoeffizient zu 0,07 angenommen wird?

Lösung: A = 47,63 kgm.

3) Ein Schleifstein von 1,5 m Durchmesser laufe mit 90 Umdrehungen pro Minute. Das abzuschleifende Stück werde mit einer Kraft von 60 kg gegen den Schleifstein gedrückt, der Reibungskoeffizient sei = 0,4. Welche Reibungsarbeit findet am Umfange des Schleifsteines statt?

Lösung: A = 169,63 kgm.

4) Vermittelst des in Fig. 100) dargestellten Bremszaumes soll die utzarbeit einer Turbine bestimmt werden, deren Umdrehungszahl = 120 der Minute ist. Der Hebelarm des Zaumes ist = 2,5 m, das Gewicht der Wagschale = 130 kg.

Lösung: A = 54,44 Pferdestärken.

5) Das Gewicht einer Lokomotive betrage 20000 kg; dieselbe soll is dem Zustande der Ruhe in eine Geschwindigkeit von 8 m in der ekunde versetzt werden. Welche Arbeit mufs der Dampf in den Cyndern der Lokomotive verrichten, wenn auf Nebenhindernisse keine ücksicht genommen wird?

Lösung: A = 65239,5 kgm.

6) Wie grofs ist die zum Betriebe einer Feuerspritze erforderliche Arit, wenn dieselbe in der Sekunde 15 Liter Wasser mit einer Gehwindigkeit von 20 m fortschleudern soll?

Lösung: A = 305,81 kgm.

7) Eine Wasserrohrleitung habe eine Länge von 120 m und einen chten Durchmesser von 300 mm. Das Wasser bewege sich in der ohrleitung mit einer Geschwindigkeit von 1,5 m. Wie viel Arbeit ist dem Wasser der Leitung angesammelt?

Lösung: A = 972,6 kgm.

8) Eine Kanonenkugel von 20 kg Gewicht werde mit einer Gehwindigkeit von 600 m abgeschossen. Wie grofs ist die von dem ulvergase verrichtete Arbeit, um der Kanonenkugel diese Geschwindigeit zu erteilen?

Lösung: A = 366972,4 kgm.

Zwanzigstes Kapitel.

Berechnung der Drehbänke.

Die Drehbänke dienen den verschiedensten Zwecken. Am äufigsten werden sie zum Abdrehen von runden Körpern — sogenannten Rotationskörpern — und zum Schneiden on Schraubengewinden benützt.

Um sie für den ersten Zweck zu verwenden, ist es von esonderer Wichtigkeit, die Drehbank so herzurichten, dafs as abzudrehende Arbeitsstück auch diejenige Umfangsgeschwindigkeit erhalte, welche dessen Durchmesser und Material entspricht. Die Verschiedenartigkeit der Widerstände, welche die einzelnen Materialien dem Drehstahl bieten, edingt diese Notwendigkeit.

Um die Drehbank dem anderen Zwecke dienstbar zu achen, ist es notwendig, demjenigen Teile derselben, welcher en Drehstahl trägt — dem Support — eine solche Geschwindigkeit der Bewegung zu geben, dafs auch in der That uf dem mit Gewinde zu versehenden Bolzen eine Schraubenlinie von vorgeschriebener Ganghöhe entsteht.

Damit man nun eine Drehbank zum Abdrehen gewisser Körper herrichten, und die eventuell hierzu erforderlichen

kleinen Rechnungen ausführen kann, mufs man diejenigen Umfangsgeschwindigkeiten v kennen, welche die abzudrehenden Materialien höchstens annehmen dürfen, wenn gute und saubere Arbeit geliefert werden soll.

Die wichtigsten Werte sind nachstehend zusammengetragen:

Für	Gufseisen,	hartes ist	v = 2 cm.
„	„	weiches „	v = 9 cm.
„	Stahl	„	v = 5 cm.
„	Schmiedeeisen . .	„	v = 13 cm.
„	Messing u. Bronze	„	v = 15 cm.
„	hartes Holz . . .	„	v = 20—35 cm.
„	weiches „ . . .	„	v = 100—120 cm.

Bezeichnet man mit

d in cm den Durchmesser des abzudrehenden Arbeitsstückes;

n die Umdrehungszahl der Drehbankspindel pro Minute,

so liegt der anzustellenden Berechnung die im I. Kapitel, Seite 58 hergeleitete Formel 4) zu Grunde, nach welcher die Umfangsgeschwindigkeit

$v = \frac{\pi \cdot d \cdot n}{60}$ gefunden wurde. Hieraus folgt unmittelbar:

$n = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot d}$, welchen Wert man für überschlägige Rechnungen mit genügender Genauigkeit

$n = 19{,}1 \cdot \frac{v}{d}$ setzen kann . . . . . 162)

Beispiele:

1) Eine schmiedeeiserne Welle von 8 cm Durchmesser soll abgedreht werden. Wie oft mufs sich dieselbe in der Minute umdrehen?

Da hier v = 13 cm ist, so folgt nach Formel 162):

$$n = 19{,}1 \cdot \frac{v}{d} = 19{,}1 \cdot \frac{13}{8} = 31.$$

2) Wie viel Umdrehungen pro Minute mufs ein Radreifen aus hartem Schmiedeeisen und von 100 cm Durchmesser machen?

Setzt man hier v = 9,5, so folgt nach Formel 162):

$$n = 19{,}1 \cdot \frac{v}{d} = 19{,}1 \cdot \frac{9{,}5}{100} = 1{,}8 = 2 \text{ (abgerundet).}$$

3) Ein Pumpencylinder aus Messing von 22 cm Durchmesser soll ausgebohrt werden. Wie grofs ist die Anzahl seiner Umdrehungen pro Minute?

Für Messing ist v = 15 cm; mithin nach Formel 162):

$$n = 19{,}1 \cdot \frac{v}{d} = 19{,}1 \cdot \frac{15}{22} = 13 \text{ (abgerundet).}$$

4) Welchen kleinsten Durchmesser darf ein abzudrehendes Holzstück erhalten, wenn die mit Planscheibe versehene Drehbank nur 45 Umdrehungen pro Minute macht?

Es sei $v = 50$ cm; nach Formel 162) wird alsdann:

$$d = 19{,}1 \cdot \frac{v}{n} = 19{,}1 \cdot \frac{50}{45} = 21{,}2 \text{ cm}.$$

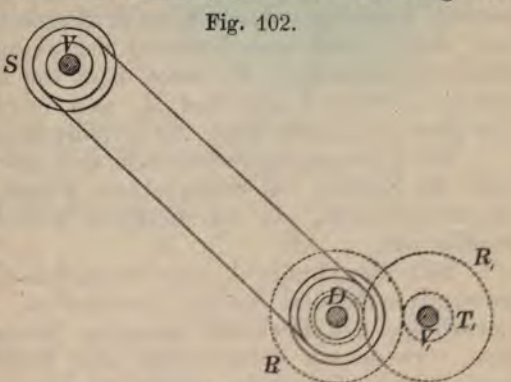
5) Auf einer Drehbank, welche 40 Umdrehungen pro Minute macht, soll das Holzmodell eines Cylinders von 35 cm Durchmesser abgedreht werden. Wie grofs ist die Umfangsgeschwindigkeit?

Aus Formel 162) folgt:

$$v = \frac{n \cdot d}{19{,}1} = \frac{40 \cdot 35}{19{,}1} = 73 \text{ cm}.$$

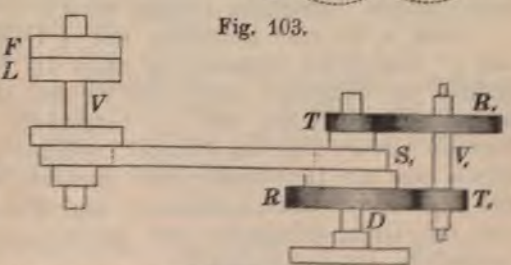
Über die Geschwindigkeit, mit welcher der Drehstahl parallel zur Achse der Drehbankspindel fortbewegt werden darf, nähere Angaben zu machen, ist insofern äufserst schwierig, als dieselbe erstens innerhalb ziemlich weiter Grenzen liegt und zweitens, aufser von dem zu bearbeitenden Materiale, noch von vielen anderen Umständen abhängig ist. Es sind hierbei die Gröfse der Betriebskraft, die Arbeitsleistung der Drehbank, die Form des zu erzeugenden Körpers, insbesondere die Art der Arbeit, ob schroppen oder schlichten, wohl zu berücksichtigen.

Fig. 102.



Es ist aber auch eine Berechnung in gerade diesem Sinne weniger notwendig, da die Einrichtung des Supportes jeder Zeit und ohne Mühe gestattet, eine falsche Geschwindigkeit mit Leichtigkeit zu ändern.

Fig. 103.



Um die Anzahl der Umdrehungen dem jeweiligen Bedürfnisse anpassen zu können, wird die Bewegung der Drehbankspindel von einer Vorgelegewelle aus durch Stufenscheiben und Zahnräder bewerkstelligt. Eine derartige, allgemein übliche Anordnung ist in Fig. 102 und 103) im Aufrifs und Grundrifs zur Anschauung gebracht.

Auf der Vorgelegewelle eines Deckenvorgeleges sitzen die Fest- und Losscheiben F und L, sowie die Stufenscheibe S. Die Drehbankspindel D trägt lose, d. h. ohne Verbindung mit derselben eine korrespondierende Stufenscheibe S_1 und das in diese eingesetzte Trieb T; fest dagegen ist das Rad R aufgekeilt. In der Scheibe dieses Rades befindet sich ein Mitnehmer, welcher in einen Einschnitt am inneren Rande der Stufenscheibe geschoben werden kann und dazu dient, eine feste Verbindung zwischen der Stufenscheibe S_1 und der Drehbankspindel herzustellen. Neben der Drehbankspindel liegt die Vorgelegewelle V_1, auf welche ein Rad R_1 und ein Trieb T_1 fest aufgekeilt sind. Die Vorgelegewelle selbst ist hohl und läuft auf einer anderen Welle mit exzentrischen Zapfen, so dafs eine nur geringe Drehung der inneren Welle genügt, um das Rädervorgelege ein- oder auszurücken. Für gewöhnliche Geschwindigkeiten kuppelt man das Rad R mit der Stufenscheibe S_1 und treibt so die Drehbankspindel direkt durch die Stufenscheibe. Soll die Drehbank jedoch langsamer laufen, so zieht man den Mitnehmer zurück, entkuppelt dadurch die Stufenscheibe von dem Rade R und rückt durch eine Drehung der exzentrischen Welle das Rädervorgelege ein. Es treibt dann von der Stufenscheibe S_1 aus das Trieb T das Rad R_1 und hierdurch das Trieb T_1 das Rad R, folglich auch die Drehbankspindel.

Die Übersetzungsverhältnisse sind gewöhnlich so gewählt, dafs die Spindel bei eingerücktem Vorgelege ungefähr 9-mal langsamer läuft, als bei direktem Antriebe von der Stufenscheibe aus.

Soll die Drehbank zum Schneiden von Schraubengewinden benützt werden, so wird es, wie schon erwähnt, notwendig, den Drehstahl derartig fortzubewegen, dafs auf dem verwendeten Arbeitsstücke eine Schraubenlinie von vorgeschriebener Ganghöhe erzeugt wird.

Um z. B. eine Schraube mit 4 Gängen pro Zoll oder mit $\frac{1}{4}$" Ganghöhe herzustellen, mufs die Bewegung des Drehstahles so bemessen sein, dafs er bei je einer Umdrehung der Drehbankspindel um $\frac{1}{4}$" vorgerückt wird. Zu diesem Zwecke bewegt man den Support, welcher den Drehstahl trägt durch eine zur Drehbankspindel parallele Schraubenspindel — die sogenannte Leitspindel — und giebt dieser durch ein von der Drehbankspindel aus getriebenes Räderwerk die erforderliche Umdrehungszahl.

Der Drehstahl bewegt sich dabei mit derselben Geschwindigkeit wie die Schraubenmutter, welche auf der Leit*spindel sitzt*; der Drehstahl schreitet also um die Ganghöh*der Leitspindel* vor, wenn diese sich einmal umgedreht h

Besitzen daher Drehbankspindel und Leitspindel gleiche mdrehungszahlen, so entsteht ein Gewinde, dessen Ganghöhe eich der Ganghöhe der Leitspindel ist. Macht die Dreh- ınkspindel 2-mal mehr Umdrehungen, als die Leitspindel, erhält das zu schneidende Gewinde eine Ganghöhe, welche eich der halben Ganghöhe der Leitspindel ist. Macht end- ch die Drehbankspindel nur 2 Umdrehungen in derselben eit, in welcher die Leitspindel deren 3 macht, so kommen Ganghöhen des neu zu schneidenden Gewindes auf eine änge, welche = 3 Ganghöhen der Leitspindel ist; d. h. die anghöhe des neu zu schneidenden Gewindes ist $1^1/_2$ mal röfser, als diejenige der Leitspindel.

Fig. 104) stellt ein zur Bewegung der Leitspindel dienendes äderwerk dar, in welchem auf der Drehbankspindel D ein rieb mit a Zähnen sitzt, welches durch ein Zwischenrad R it c Zähnen ein auf der Leitspindel L sitzendes Rad mit Zähnen treibt.

Bezeichnet man hierbei mit z die Umdrehungszahl des ades R und mit y diejenige der Leitspindel L, so ist nach em auf Seite 124) Gesagten, wenn das Trieb D eine Um- rehung macht:

$$1 \cdot a = z \cdot c \text{ und}$$

$$z \cdot c = y \cdot b.$$

Multipliziert man beide Glei- ıungen miteinander, so wird

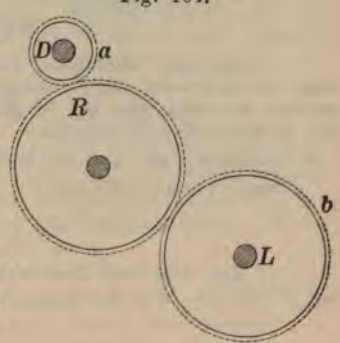
$$1 \cdot a = y \cdot b,$$

oraus sich die Umdrehungszahl er Leitspindel zu

$$y = \frac{1 \cdot a}{b} = \frac{a}{b}$$

erechnet.

Fig. 104.



Das Zwischenrad R ist lso ohne Bedeutung für das bersetzungsverhältnis. Die ähnezahl desselben kann ganz eliebig, natürlich den räumlichen Verhältnissen angepafst, rofs sein. Zu beachten ist, dafs, wenn Linksgewinde eschnitten werden soll, noch ein zweites Zwischenrad — eitrad — eingeschaltet werden mufs.

Der Support mufs sich nun dem Übersetzungsverhältnisse entsprechend fortbewegen. Ist hierbei die Ganghöhe der eitspindel = h Zoll, so ist der Weg des Supports dem- emäfs

$$= \frac{a}{b} \cdot h \text{ Zoll.}$$

Will man Gewinde mit x Gängen pro Zoll oder mit $\frac{1}{x}$ Zoll Ganghöhe schneiden, so mufs nach dem Vorhergesagten der Support bei je einer Umdrehung der Drehbankspindel sich um $\frac{1}{x}$ Zoll fortbewegen. Hieraus folgt, dafs notgedrungen

$$\frac{1}{x} = \frac{a}{b} \cdot h \text{ sein mufs} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 163)$$

Aus Formel 163) folgt:

Ganghöhe der Leitspindel:

$$h = \frac{b}{a \cdot x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 164)$$

Anzahl der pro Zoll zu schneidenden Gänge des neuen Gewindes:

$$x = \frac{b}{a \cdot h} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 165)$$

Zähnezahl des Rades auf der Drehbankspindel:

$$a = \frac{b}{h \cdot x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 166)$$

Zähnezahl des Rades auf der Leitspindel:

$$b = a \cdot h \cdot x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 167)$$

Beispiele:

1) Auf einer Drehbank, deren Leitspindel $^1/_4$" Ganghöhe hat, will man eine Schraube mit 10 Gängen pro Zoll schneiden. Ein auf der Leitspindel sitzendes Rad hat 50 Zähne; wieviel Zähne mufs das Trieb auf der Drehbankspindel erhalten?

Gegeben sind: $x = 10$; $h = {}^1/_4 = 0{,}25$; $b = 50$.

Nach Formel 166) ist:

$$a = \frac{b}{h \cdot x} = \frac{50}{0{,}25 \cdot 10} = 20 \text{ Zähne.}$$

2) Auf derselben Drehbank sitzen ein Trieb mit 20 und ein Rad mit 70 Zähnen. Wieviel Gänge pro Zoll erhält die zu schneidende Schraube?

Gegeben sind: $h = {}^1/_4 = 0{,}25$; $a = 20$; $b = 70$.

Nach Formel 165) ist:

$$x = \frac{b}{a \cdot h} = \frac{70}{20 \cdot 0{,}25} = 14 \text{ Gänge pro Zoll.}$$

3) Bei Anwendung eines Triebes mit 20 und eines Rades mit 110 Zähnen wurde auf einer Drehbank eine Schraube mit 11 Gängen pro Zoll geschnitten. Welche Ganghöhe hatte die zugehörige Leitspindel?

Gegeben sind: $a = 20$; $b = 110$; $x = 11$.

Nach Formel 164) ist:

$$h = \frac{b}{a \cdot x} = \frac{110}{20 \cdot 11} = {}^1/_2\text{"; d. h. die Leitspindel hatte 2 Gänge pro Zoll.}$$

Fig. 105.

Ein anderes, zum Betriebe einer Drehbank dienendes Räderwerk zeigt Fig. 105). Die Drehbankspindel D trägt ein Trieb mit a Zähnen, welches ein auf einen Zapfen aufgestecktes Rad mit b Zähnen treibt. Durch ein auf demselben Zapfen sitzendes Trieb mit a_1 Zähnen wird die Bewegung des auf der Leitspindel L sitzenden Rades mit b_1 Zähnen bewirkt. Für eine derartige Anordnung von Rädern ergiebt sich, wenn mit x wieder die Ganghöhe des zu schneidenden Gewindes bezeichnet wird:

$$\frac{1}{x} = \frac{a \cdot a_1}{b \cdot b_1} \cdot h \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 168)$$

(Vergleiche Kap. XV, Seite 130.)

Beispiele:

1) Die Ganghöhe der Leitspindel einer Drehbank ist $h = 1/2'' = 0{,}5''$. ieviel Gänge pro Zoll erhält eine zu schneidende Schraube, wenn = 70; b = 100; $a_1 = 20$ und $b_1 = 140$ angenommen werden?

Nach Formel 168) wird:

$$x = \frac{b \cdot b_1}{a \cdot a_1 \cdot h} = \frac{100 \cdot 140}{70 \cdot 20 \cdot 0{,}5} = 20 \text{ Gänge.}$$

2) Gegeben sind: a = 40; b = 80 und $a_1 = 40$; man will ein Gende mit 9 Gängen pro Zoll schneiden. Wieviel Zähne mufs das ad auf der Leitspindel besitzen, wenn die Ganghöhe der letzteren $= 1/2''$ ist?

Aus Formel 168) folgt:

$$b_1 = \frac{a \cdot a_1 \cdot h \cdot x}{b} = \frac{40 \cdot 40 \cdot 0{,}5 \cdot 9}{80} = 90 \text{ Zähne.}$$

3) Auf der in den vorstehenden Beispielen angenommenen Drehnk soll eine Schraube mit 10 Gängen pro Zoll geschnitten werden. ie Drehbankspindel trägt ein Trieb mit 80, der Zapfen ein Rad mit 0 Zähnen. Welche Zähnezahlen müssen die beiden anderen noch erderlichen Räder erhalten?

Gegeben sind: x = 10; a = 80; b = 100 und h = 0,5. Man stelle s Verhältnis $\frac{a_1}{b_1}$ der Zähnezahlen der beiden benötigten Räder fest, elches sich aus Formel 168) wie folgt ergiebt:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{b}{x \cdot a \cdot h} = \frac{100}{10 \cdot 80 \cdot 0{,}5} = \frac{1}{4}, \text{ d. h.}$$

e Zähnezahl der Räder müssen sich wie 1 : 4 verhalten. Man kann mnach wählen:

$a_1 = 15$; $b_1 = 60$ oder:
$a_1 = 20$; $b_1 = 80$ oder:
$a_1 = 25$; $b_1 = 100$ oder:
$a_1 = 30$; $b_1 = 120$ oder:
$a_1 = 40$; $b_1 = 160$
u. s. w.

mer mufs, wenn man die Zähnezahl a_1 mit 4 multipliziert, die Zähnel b_1 erhalten werden. Wäre das Verhältnis $= 1/5$ geworden, so müfste sprechend verfahren werden; u. s. w.

Aus Formel 168):

$$\frac{1}{x} = \frac{a \cdot a_1}{b \cdot b_1} \cdot h$$

ist ersichtlich, dafs durch das Übersetzungsverhältnis $\frac{a_1}{b}$ die Gangzahl beliebig geändert werden kann. Man nennt deshalb die Räder in dieser Schaltung „Übersetzungsräder“ im Gegensatz zu den „Zwischen- oder Übertragungsrädern“, welche nur die Übertragung der Bewegung von der Drehbankspindel auf die Leitspindel vermitteln, jedoch keinen Einfluſs auf die Übersetzungsverhältnisse haben. Im allgemeinen nennt man beide Arten Räder, da sie für die verschiedenen Gewinde jedesmal ausgewechselt werden müssen, „Wechselräder“.

Die meisten Leitspindeldrehbänke sind jetzt so eingerichtet, dafs für die gebräuchlichsten Steigungen auf der Drehbankspindel nur ein Trieb mit 20, 40 oder 80 Zähnen sitzt, während die Zähnezahl des Rades auf der Leitspindel ein entsprechendes Vielfaches der Gangzahl des zu schneidenden Gewindes wird. Zum Übertragen der Bewegung sind ein oder zwei Zwischenräder eingeschaltet. Nur bei einer aufsergewöhnlichen Anzahl der Gänge auf 1 Zoll ist man bei diesen Drehbänken genötigt, Übersetzungsräder anzuwenden, wie dies aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

Tabelle zum Gewindeschneiden; Leitspindel 4 Gänge pro 1″ engl.

Anzahl der Gänge auf 1″ engl.	Rad auf der Spindel	Übersetzungsräder	Rad auf der Leitspindel	Anzahl der Gänge auf 1″ engl.	Rad auf der Spindel	Übersetzungsräder	Rad auf der Leitspindel
36	20	60/30	90	9	40		90
27	20	60/40	90	8	40		80
24	20	60/40	80	7	40		70
20	18		90	6	40		60
18	20		90	5	40		50
16	20		80	$4^1/_2$	40		45
14	20		70	4	40		40
12	20		60	$3^1/_2$	40		35
11	20		55	3	40		30
10	20		50	$2^3/_4$	80		55

Da sich bei Gewinden mit sehr grofser Steigung die Leitspindel bedeutend schneller als die Drehbankspindel drehen mufs, arbeitet man hier stets mit Rädervorgelege und benützt

ir den Antrieb der Wechselräder ein besonderes Rad, welches irekt von dem Trieb in der Stufenscheibe (Fig. 102 und 103) ewegt wird. Da aber dieses Trieb ungefähr 9 mal hneller als das Trieb auf der Drehbankspindel läuft,) ergeben sich für die Übersetzungsräder sehr günstige erhältnisse.

abelle zum Gewindeschneiden für eine Drehbank mit Vorgelege und einer Ganghöhe der Leitspindel = $^1/_2$″ engl.

Anzahl der Gänge auf 1″ engl. x	Rad auf der Spindel a	Vorgelegerad b	Vorgelegetrieb a_1	Rad auf der Leitspindel b_1
8,5	90	85	20	90
10	60	75	20	80
12	90	90	20	120
14	90	90	20	140
16	60	80	20	120
18	40	60	20	120
20	60	100	20	120
25	60	100	20	150
30	70	140	20	150
40	30	100	20	120
50	30	100	20	150
60	30	120	20	150
70	30	140	20	150

Von dem englischen Werkzeugfabrikanten *Whitworth* nd für gewöhnliche Befestigungsschrauben Normalien aufestellt worden, welche das Verhältnis des Durchmessers eines olzens zur Anzahl der auf denselben zu schneidenden änge feststellen. Nachfolgende Tabelle giebt sowohl ber die genannten Verhältnisse, als auch über die an chrauben und glatten Bolzen gebräuchlichen Abmessungen .ufschlufs.

Erwähnt sei noch, dafs man für Schrauben mit flachängigem Gewinde die Anzahl der Gänge halb so grofs, als ir Schrauben mit dreiseitigem Gewinde nimmt.

In neuerer Zeit hat man, besonders für Mechaniker-ewinde, Tabellen aufgestellt, welche eine bestimmte Gangahl pro cm anstatt pro Zoll angeben. Derartige Geinde lassen sich jedoch, ohne Anwendung besonderer bersetzungsräder, auf den gewöhnlichen Drehbänken nicht hneiden.

Normaltabelle der Abmessungen von Schrauben (System Whitworth) und glatten Bolzen.

(Normalien der preufsischen Staatsbahnen.)

No. der Schrauben	Durchmesser der glatten Bolzen in mm	Schrauben-Bolzen: Gewindedurchmesser in den Spitzen Zoll engl.	mm	Kerndurchmesser in mm	Zahl der Gänge auf einen Zoll engl.	Höhe: des sechseckigen oder viereckigen Kopfes in mm	der Mutter in mm	der Contremutter in mm	des versenkten Kopfes: im Ganzen mm	im Konus mm	Schlüsselweite und Seite des viereckigen Kopfes in mm	Seite des Sechsecks für den Kopf oder die Mutter in mm	Splintdurchmesser in mm	Entfernung des Splintes: durch die Mutter vom Rande der letzteren in mm	vor der Mutter vom Ende des Bolzens in mm	Schrauben mit versenkten Köpfen: Durchmesser des äufseren Kreises, der die Ecken des viereckigen Kopfes bricht, in mm	Seite des viereckigen Kopfes (Ecken gebrochen) in mm	Durchmesser des Ansatzes bei den Schrauben mit runden Köpfen	Glatte Bolzen: Durchmesser des Kopfes in mm	Höhe des Kopfes in mm	Unterlegscheiben: Durchmesser: für glatte Bolzen in mm	für Schraubenmuttern in mm	Stärke der Unterlegscheibe in mm	Höhe des Splintringes in mm
3	10	3/8	9,52	7,49	16	7	10	7	6	5	17	9,8	4	7	6	14	12	13	16	5	16	22	3	10
4	13	1/2	12,70	9,99	12	9	13	10	8	7	22	12,7	5	9	8	20	17	16	22	6	22	28	4	11
5	16	5/8	15,87	12,91	11	12	16	12	10	8	28	16,2	5	12	8	22	17	20	26	7	26	36	4	12
6	20	3/4	19,05	15,79	10	14	20	15	12	10	33	19,1	6	14	9	26	22	23	32	8	32	44	5	13
7	23	7/8	22,22	18,60	9	16	23	17	14	11	39	22,5	6	16	9	34	28	26	36	9	36	50	5	15
8	26	1	25,40	21,33	8	18	26	19	16	13	44	25,4	7	18	10	34	28	30	40	10	40	56	6	16
9	30	1 1/8	28,57	23,92	7	20	30	21	18	14	50	28,9	7	20	12	40	33	33	44	10	44	62	6	17
10	33	1 1/4	31,75	27,10	7	22	33	24	20	16	55	31,8	8	22	12	40	33	36	48	11	48	68	7	18
11	36	1 3/8	34,92	29,50	6	24	36	26	22	18	61	35,2	9	24	13	—	—	—	52	11	52	74	7	19
12	40	1 1/2	38,10	32,68	6	26	40	28	24	20	66	38,1	9	26	14	—	—	—	56	12	56	80	8	20
13	43	1 5/8	41,27	34,76	5	29	43	31	26	21	72	41,6	10	29	15	—	—	—	60	12	60	86	8	21
14	46	1 3/4	44,45	37,94	5	31	46	33	28	23	77	44,5	10	31	15	—	—	—	64	13	64	92	9	22
15	50	1 7/8	47,63	40,40	4 1/2	34	50	36	30	25	83	47,9	10	34	16	—	—	—	68	13	68	100	9	23

Zulässige Belastung eines Schraubenbolzens $P = 220 \cdot d^2$ kg, wenn d der Durchmesser in cm ist.

In nachstehender Tabelle sind die Anzahl der Gänge n auf 10 mm Bolzenlänge bei einem Durchmesser von d mm angegeben.

Ist $d = 6 . 8 . 10 . 12 . 15 . 18 . 21 . 24 . 27 . 30$

so wird $n = 7 . 6 . 5\frac{1}{2} . 5 . 4\frac{1}{4} . 4 . 3\frac{3}{4} . 3 . 3 . 2\frac{1}{2}$

Ist $d = 34 . 38 . 42 . 46 . 50 . 55 . 60 . 65 . 70 . 75$

so wird $n = 2\frac{1}{2} . 2\frac{1}{2} . 2\frac{1}{8} . 2\frac{1}{8} . 1\frac{7}{8} . 1\frac{7}{8} . 1\frac{5}{8} . 1\frac{5}{8} . 1\frac{3}{8} . 1\frac{3}{8}$.

In den Maschinenfabriken schneidet man die Schrauben regelmäfsig nach Whitworth-Skala, wobei man sich gewöhnlich der den Drehbänken mitgegebenen, im voraus speziell für jede Drehbank berechneten Tabellen bedient, welche die zur Erreichung einer vorgeschriebenen Ganghöhe zu verwendenden Wechselräder genau bezeichnen.

Übungsbeispiele:

1) Auf einer Drehbank, deren Leitspindel $^3/_8$″ Ganghöhe hat, soll eine Schraube mit 11 Gängen pro Zoll geschnitten werden. Wie viel Zähne mufs das auf die Leitspindel zu steckende Rad haben, wenn die Zähnezahl des Triebes zu 16 angenommen wird?

Lösung: b = 66 Zähne.

2) Welche Ganghöhe hatte die Leitspindel einer Drehbank, wenn vermittelst derselben eine Schraube mit 16 Gängen pro Zoll geschnitten wurde. Das Rad auf der Leitspindel hatte 64 Zähne und das Trieb 16 Zähne?

Lösung: h = $^1/_4$″ Ganghöhe.

3) Auf einer Drehbank sitzt ein Trieb mit 24 Zähnen, auf der Leitspindel ein Rad mit 108 Zähnen; die Leitspindel hat $^1/_2$″ Ganghöhe. Wie viel Gänge auf 1″ erhält die zu schneidende Schraube?

Lösung: x = 9 Gänge.

4) Auf einer Drehbank soll eine Schraube mit 18 Gängen pro 1″ geschnitten werden. Welche Ganghöhe erhält die Leitspindel, wenn a = 40; b = 60; a_1 = 20; b_1 = 120 angenommen werden?

Lösung: h = $^1/_2$″ Ganghöhe.

5) Bei einer Drehbank sind gegeben: a = 20; b = 60; a_1 = 30 und b_1 = 90. Die Ganghöhe der Leitspindel beträgt $^1/_4$″. Wie viel Gänge auf 1″ erhält die zu schneidende Schraube?

Lösung: x = 36 Gänge.

6) Eine Drehbank habe eine Leitspindel mit $^1/_4$″ Ganghöhe. Das Rad auf der Spindel habe 20 Zähne, das Rad auf der Leitspindel 80 Zähne; das Rad auf der Vorgelegewelle 60 Zähne. Es soll eine Schraube mit 24 Gängen geschnitten werden. Welche Zähnezahl erhält das Trieb auf der Vorgelegewelle?

Lösung: a_1 = 40 Zähne.

Einundzwanzigstes Kapitel.

Berechnung der Pumpen.

Um Wasser oder andere Flüssigkeiten auf beliebige Höhen zu heben und dann eventuell noch weiter zu befördern, dienen als bestes und bewährtestes aller bekannten Mittel die Pumpen.

Es sollen in Folgendem nur die sogenannten Kolbenpumpen — Maschinen, welche aus Cylindern bestehen, in

denen sich zweckmäfsig konstruierte Kolben bewegen, durch welche das Wasser oder eine andere zu hebende Flüssigkeit angesaugt und dann weiter fortgeschafft wird — einer eingehenden Besprechung unterzogen werden und die erforderlichen Berechnungen sich hauptsächlich auf die zu liefernde Wassermenge, die wichtigsten Abmessungen, und auf die zum Betriebe einer Pumpe erforderliche Arbeit erstrecken.

Man unterscheidet einfachwirkende und doppeltwirkende Kolbenpumpen, je nachdem die Pumpe bei einem Hin- und Hergange des Kolbens einmal oder zweimal Wasser ansaugt und weiter drückt.

Für die einfachwirkende Kolbenpumpe müfste das Wasserquantum, wenn die thatsächlichen Verluste durch Zurückfliefsen einer geringen Wassermenge durch die Ventile nicht vorhanden wären, gleich dem Inhalte des von dem Kolben durchlaufenen Raumes sein.

Bezeichnet man mit

Q_t die pro Kolbenhub angesaugte Wassermenge in cbm;

d den Durchmesser des Kolbens in m;

s den Kolbenhub in m, so ist:

$$Q_t = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot s \text{ Kubikmeter.}$$

Diese sogenannte theoretische Wassermenge ist jedoch der schon erwähnten Verluste wegen zu grofs.

Um die effektive, d. i. die in der That von der Pumpe gelieferte Wassermenge zu finden, mufs man den in vorstehender Gleichung für Q_t gefundenen Wert mit einem Koeffizienten c, welcher den Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis der Pumpe angiebt, multiplizieren. Man setzt:

Für sorgfältig ausgeführte Pumpen: $c = 0{,}95$.
„ gute „ $c = 0{,}90$.
„ gewöhnliche „ $c = 0{,}80$.

Dementsprechend wird die pro Kolbenhub von einer Pumpe gelieferte effektive Wassermenge:

$$Q_e = c \cdot \frac{d^2 \cdot n}{4} \cdot s = 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot s \text{ Kubikmeter;}$$

oder, da ein cbm = 1000 l ist:

$$Q_e = 1000 \cdot 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot s = 785 \cdot c \cdot d^2 \cdot s \text{ Liter.}$$

Bezeichnet man mit

n die Anzahl der Doppelhübe des Kolbens pro Minute, so macht derselbe deren in einer Sekunde $\frac{n}{60}$ und ergiebt sich somit die pro Sekunde von der Pumpe zu liefernde Wassermenge Q_s zu:

$$Q_s = 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot s \cdot \frac{n}{60} = 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot \frac{s \cdot n}{60} \text{ Kubikmeter.}$$

Nach Formel 7) ist aber die mittlere Kolbengeschwindigkeit $v = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60}$, also umgekehrt der Wert $\frac{s \cdot n}{60} = \frac{v}{2}$; mithin erhält man auch:

$$Q_s = 0{,}785 \cdot c \cdot d^2 \cdot \frac{v}{2} \text{ Kubikmeter.}$$

Nimmt man noch, um ganz sicher zu gehen, $c = 0{,}8$ an, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} Q_s &= 0{,}785 \cdot 0{,}8 \cdot d^2 \cdot \frac{s \cdot n}{60}. \\ &= 0{,}011 \cdot d^2 \cdot n \cdot s \text{ Kubikmeter} \quad \ldots\ldots 169) \\ &= 11 \cdot d^2 \cdot n \cdot s \text{ Liter.} \\ &= 0{,}785 \cdot 0{,}8 \cdot d^2 \cdot \frac{v}{2}. \\ &= 0{,}314 \cdot d^2 \cdot v \text{ Kubikmeter} \quad \ldots\ldots\ldots 170) \\ &= 314 \cdot d^2 \cdot v \text{ Liter.} \end{aligned}$$

Der Durchmesser des Pumpencylinders berechnet sich nach Formel 169) wie folgt:

$$d = \sqrt{\frac{Q_s}{0{,}011 \cdot n \cdot s}} = 9{,}5 \cdot \sqrt{\frac{Q_s}{n \cdot s}} \text{ Meter} \quad \ldots 171)$$

Aus Formel 170):

$$d = \sqrt{\frac{Q_s}{0{,}314 \cdot v}} = 1{,}785 \cdot \sqrt{\frac{Q_s}{v}} \text{ Meter} \quad \ldots 172)$$

Ferner entwickelt sich aus Formel 169) der Kolbenhub s zu:

$$s = \frac{Q_s}{0{,}011 \cdot d^2 \cdot n} = 90{,}9 \cdot \frac{Q_s}{d^2 \cdot n} \text{ Meter} \quad \ldots\ldots 173)$$

und aus der vorstehend angegebenen Gleichung für v zu:

$$s = \frac{30 \cdot v}{n} \text{ Meter} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 174)$$

Es empfiehlt sich, den Kolbenhub möglichst grofs zu nehmen, da jeder Wechsel der Kolbenbewegung mit Kraftverlusten verbunden ist.

Die Höhe des Hubes für gewöhnliche Handpumpen schwankt zwischen 0,15 m bis 0,3 m.

Den Saug- und Druckrohren giebt man in der Regel gleiche Durchmesser, d. h. sie erhalten gleiche Querschnitte, welche man bei langen Leitungen gewöhnlich $= \frac{1}{2}$, bei kurzen jedoch $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ des Kolbenquerschnittes macht. Die Saugleitungen sind stets nach der Pumpe zu ansteigend zu legen.

Die Höhe, bis zu welcher eine Pumpe Wasser ansaugen kann, die sogenannte Saughöhe, ist abhängig vom Kolbenhube und vom schädlichen Raume, d. i. demjenigen Raume, welcher sich zwischen dem Kolben in seiner tiefsten Stellung und dem geschlossenen Saugventile befindet.

Berücksichtigt man, dafs durch den mittleren Luftdruck nur einer Wassersäule von 10,336 m das Gleichgewicht gehalten werden kann, mit anderen Worten, dafs das Wasser im luftleer gedachten Saugrohre durch den auf dem ganzen Wasserspiegel lastenden Atmosphärendruck nur auf die genannte Höhe steigen würde, so folgt, dafs im günstigsten Falle der Kolben in seiner tiefsten Stellung nur rund 10 m über dem Wasserspiegel sich befinden dürfte.

Der Einfluſs des schädlichen Raumes, des Ventilgewichtes (welches das steigende Wasser mit heben muſs), der Ungleichmäſsigkeit des Atmosphärendruckes und der Widerstände, welche das steigende Wasser in den Rohrleitungen zu überwinden hat, bedingt jedoch, dafs der Kolben nicht 10 m, sondern

für gute Pumpen nur 7 m bis 8 m und
„ gewöhnliche Pumpen nur 5 m bis 6 m

vom Unterwasserspiegel entfernt sein darf.

Die Druckhöhe ist jedoch eine beliebige; das Wasser über dem Kolben kann bei genügendem Kraftaufwande beliebig hoch gedrückt werden.

Die Geschwindigkeit des angesaugten Wassers — 0,7 m bis 1,3 m pro Sekunde — muſs stets gröſser sein als die Kolbengeschwindigkeit, damit das Wasser dem Kolben folgen und dieser sich so nicht etwa von dem nachfolgenden Wasser trennen kann. Es entsteht in diesem Falle zwischen Kolben und Wasseroberfläche ein luftverdünnter Raum, welchen das Wasser sofort ausfüllen wird, wenn der Kolben, nahe dem Ende seines Hubes eine langsamere Bewegung annimmt. Das Wasser prallt dann ziemlich heftig gegen den Kolben und verursacht dadurch den sogenannten Wasserschlag.

Gebräuchliche Kolbengeschwindigkeiten sind:

Bei guten Pumpen 0,2 m bis 0,3 m pro Sekunde;
„ gewöhnlichen Pumpen 0,3 m bis 0,4 m pro Sekunde.

Gegen das Schlagen vorhandener Pumpen hilft man sich durch Beschweren der Pumpenventile, durch Vergröſserung der Saugrohre und durch Anbringung von Saug- und Druckwindkesseln.

Der Inhalt eines Windkessels soll gleich dem 4—6 fachen Inhalte des Pumpencylinders sein.

Bei Feststellung der Gröſse der Ventilquerschnitte ist darauf zu achten, dafs dieselben grofs genug sein müssen, um das Wasser gleichmäſsig, d. h. ohne Beschleunigung durchzulassen. Der freie Durchgang derselben muſs daher *mindestens* gleich dem Querschnitte der Rohre sein.

Bezeichnet man mit

d_1 den Durchmesser der Ventilöffnung in m;

F den Querschnitt der Rohre in qm;

f die Fläche des Ventilführungssteges, ebenfalls in qm, so folgt:

$$\frac{d_1^2 \cdot \pi}{4} = F + f.$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{(F+f) \cdot 4}{\pi}}$$

$$d_1 = 1{,}13 \cdot \sqrt{F+f} \text{ Meter} \quad \ldots\ldots 175)$$

Sobald das Wasser das Ventil passiert hat, mufs es durch eine Öffnung = dem Umfange des Ventiles und der Hubhöhe h desselben = $h \cdot d_1 \cdot \pi$ in das über dem Ventile befindliche Druckrohr gelangen. Die genannte Offnung mufs natürlich, um dem Wasser freien Durchgang zu gestatten, gleich dem Ventilquerschnitt sein, woraus

$h \cdot d_1 \cdot \pi = \frac{d_1^2 \cdot \pi}{4}$ folgt. Mithin:

$$h = \frac{d_1}{4} = \frac{1}{4} \cdot d_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 176)$$

Dieser Wert gilt speziell für das Kegelventil; dasselbe mufs nach der vorstehenden Rechnung einen Hub erhalten, dessen Höhe = $\frac{1}{4}$ seines Durchmessers ist.

Bei den Klappenventilen ist für die Gröfse des freien Durchganges der Ausschlagwinkel derselben mafsgebend. Nach *Grove* folgt für diesen Winkel γ:

1) Rechteckige Klappe:

Sind a und b die Seiten des Rechtecks, so ist für

$\frac{a}{b} = 1$ der Winkel $\gamma = 33^0$

$= \frac{3}{4}$ „ „ $\gamma = 39^0$

$= \frac{2}{3}$ „ „ $\gamma = 42^0$

$= \frac{1}{2}$ „ „ $\gamma = 49^0$

2) Halbrunde Klappe: $\gamma = 52^0$

3) Kreisrunde Klappe: $\gamma = 33^0$

Um eine bestimmte Wassermenge Q_s cbm in einer Sekunde auf eine Höhe von H Meter zu heben ist theoretisch, da 1 cbm Wasser = 1000 kg wiegt, eine Arbeit von $1000 \cdot Q_s \cdot H$ kgm erforderlich.

Bezeichnet man mit

Q_s (vergl. Formel 169 und 170) das pro Sekunde zu hebende Wasserquantum in cbm;

H die Summe der Saug- und Druckhöhen,

so ist die pro Sekunde erforderliche Betriebsarbeit in *Pferdestärken:*

$$A = \frac{Q_s \cdot H \cdot 1000}{75} \cdot c = 13{,}3 \cdot Q_s \cdot H \cdot c \text{ Pferdestärken*)} \ldots 177)$$

wenn c einen Erfahrungskoeffizienten bedeutet, welcher

für sorgfältig ausgeführte Pumpen $c = 1{,}25$
„ gute „ $c = 1{,}30$
„ gewöhnliche „ $c = 1{,}4$ bis $1{,}5$

zu setzen ist.

Für die doppelt wirkende Kolbenpumpe mufs unter sonst gleichen Verhältnissen, und da die Pumpe sowohl bei dem Hingange als auch bei dem Hergange des Kolbens Wasser ansaugt, die pro Sekunde zu liefernde Wassermenge doppelt so grofs, als bei der einfach wirkenden Kolbenpumpe sein.

Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen folgt demnach aus Formel 169):

$$Q_s = 2 \cdot 0{,}011 \cdot d^2 \cdot n \cdot s = 0{,}022 \cdot d^2 \cdot n \cdot s \text{ Kubikmeter} \ldots 178)$$
$$= 22 \cdot d^2 \cdot n \cdot s \text{ Liter.}$$

Aus Formel 170):

$$Q_s = 2 \cdot 0{,}314 \cdot d^2 \cdot v = 0{,}628 \cdot d^2 \cdot v \text{ Kubikmeter} \ldots 179)$$
$$= 628 \cdot d^2 \cdot v \text{ Liter.}$$

Für den Durchmesser des Pumpenkolbens ergiebt sich aus Formel 178):

$$d = \sqrt{\frac{Q_s}{0{,}022 \cdot n \cdot s}} = 6{,}74 \cdot \sqrt{\frac{Q_s}{n \cdot s}} \text{ Meter} \ldots 180)$$

Aus Formel 179):

$$d = \sqrt{\frac{Q_s}{0.628 \cdot v}} = 1{,}262 \cdot \sqrt{\frac{Q_s}{v}} \text{ Meter} \ldots 181)$$

Der Kolbenhub berechnet sich aus Formel 178) zu:

$$s = \frac{Q_s}{0{,}022 \cdot d^2 \cdot n} = 45{,}5 \cdot \frac{Q_s}{d^2 \cdot n} \text{ Meter} \ldots 182)$$

Über die Aufstellung und Inbetriebsetzung der Wasserpumpen ist noch Folgendes zu bemerken:

Die Aufstellung der Pumpen in vertikaler Entfernung vom niedrigsten Wasserstand bis zum Druckventilsitz — Saugehöhe — soll, wie schon erwähnt, nicht mehr als 6 bis 7 m betragen, geringere Entfernung ist nur vorteilhaft, wenn die Pumpen leicht und sicher arbeiten sollen. Bei mehr als 15 m Entfernung des Aufstellungsortes der Pumpe von der Saugestelle in horizontaler Richtung, ist die Saugehöhe entsprechend zu reduzieren.

Auf die Dichtheit der Saugeleitung ist die gröfste Sorgfalt

---

*) 1 cbm Wasser = 1000 Liter = 1000 kg.
Q_s cbm „ = $Q_s \cdot 1000$ Liter = $Q_s \cdot 1000$ kg.

ı verwenden und am Ende derselben mit einem Saugekorb nd Fufsventil zu versehen. Die Saugeleitung ist stets nach er Pumpe zu ansteigend zu legen.

Um die Dichtheit der Saugeleitung zu prüfen, nimmt an das Saugeventil heraus und füllt die Leitung auf, es arf dann während ca. einer Stunde keine wahrnehmbare Abahme des Wassers stattfinden. In der gesamten Rohrleitung - Sauge- wie Druckleitung — sind scharfe Krümmungen öglichst zu vermeiden.

Bei Dampfpumpen sind die Dampfzuleitungsrohre vor nbetriebsetzung der Pumpen mit Dampf gut auszublasen, m die Rohre von allen Rückständen — Sand, Hammerchlag etc. — zu befreien, damit diese nicht mit in Schiebersten und Dampfcylinder gerissen werden.

Die Ventilgehäuse der Pumpen sollen möglichst freiliegend nd leicht zugänglich angeordnet werden, um ein etwa notendiges Nachschleifen der Ventilkegel leicht bewerkstelligen ı können

Beispiele:*)

1) Welches theoretische Wasserquantum Qt mufs eine einfachwirkende olbenpumpe pro Hub liefern, wenn dieselbe einen Kolbendurchmesser = 0,08 m und einen Kolbenhub = 0,200 m besitzt?

Das Wasserquantum mufs gleich dem Inhalte des von dem Kolben ırchlaufenen Raumes sein, folglich:

$$Q_t = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot s = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}08^2}{4} \cdot 0{,}2 = 0{,}001 \text{ cbm} = 1 \text{ Liter.}$$

2) Wie grofs ist das pro Sekunde gelieferte, effektive Wasserıantum, wenn die genannte Pumpe 30 Hübe in der Minute macht?

Aus Formel 169) folgt:

$$Q_s = 0{,}011 \cdot d^2 \cdot n \cdot s = 0{,}011 \cdot 0{,}08^2 \cdot 30 \cdot 0{,}2.$$
$$= 0{,}0004 \text{ cbm} = 0{,}4 \text{ Liter.}$$

3) Wie grofs ist hierbei die mittlere Kolbengeschwindigkeit?

$$v = \frac{2 \cdot s \cdot n}{60} = \frac{s \cdot n}{30} = \frac{0{,}2 \cdot 30}{30} = 0{,}2 \text{ m.}$$

4) Eine Pumpe hat einen Kolbendurchmesser von 0,12 m und nen Kolbenhub von 0,25 m. Dieselbe liefert bei 20 Kolbenspielen in der inute 0,045 cbm = 45 l Wasser. Wie viel Prozent (%) beträgt diese 'assermenge von der theoretischen?

Die theoretische Wassermenge pro Minute ist:

$$Q_t = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot s \cdot n = \frac{3{,}14 \cdot 0{,}12^2}{4} \cdot 0{,}25 \cdot 20 = 0{,}057 \text{ cbm} = 57 \text{ Liter.}$$

Das Verhältnis der beiden Wassermengen ist mithin:

$Q_s : Q_t = 45 : 57$; folglich der Wirkungsgrad:

$$c = \frac{45}{57} = 0{,}79;$$ d. h. die effektive Wassermenge beigt nur $\frac{79}{100} = 79\%$ der theoretischen.

*) Vergleiche auch Beispiele unter „Mechanische Arbeit" Seite 174.)

5) Wie grofs ist der Kolbenhub einer doppelt wirkenden Pumpe, wenn dieselbe bei einem Kolbendurchmesser von 0,3 m und 40 Doppelhüben in der Minute 0,024 cbm Wasser pro Sekunde liefert?

Aus Formel 182) folgt:

$$s = 45{,}5 \cdot \frac{Q_s}{d^2 \cdot n} = 45{,}5 \cdot \frac{0{,}024}{0{,}3^2 \cdot 40} = 0{,}303 \text{ m} = 303 \text{ mm}.$$

6) Das Saugventil einer Pumpe hat eine freie Durchgangsöffnung von 50 qcm Inhalt. Wie grofs ist der Hub des Kegelventiles?

Der einem Querschnitt von 50 qcm entsprechende Durchmesser ist = 8 cm (siehe Tabelle im Anhang). Aus Formel 176) ergiebt sich demnach:

$$h = \frac{d_1}{4} = \frac{8}{4} = 2 \text{ cm}.$$

7) Eine Dampfmaschine von 6 Pferdestärken treibt eine Pumpe, welche pro Minute ein Wasserquantum von 2,5 cbm auf eine Höhe von 9 m fördert. Wie grofs ist der Wirkungsgrad dieser Pumpe?

Nach dem auf Seite 209) Gesagten ist die Arbeit der Pumpe pro Sekunde:

$$A = 1000 \cdot Q_s \cdot H = 1000 \cdot \frac{2{,}5}{60} \cdot 9 = 375 \text{ kgm}.$$

Die Arbeit der Dampfmaschine pro Sekunde ist aber:

$$A = 6 \cdot 75 = 450 \text{ kgm};$$

mithin der Wirkungsgrad:

$$c = \frac{375}{450} = 0{,}83.$$

Es gehen demnach $1{,}00 - 0{,}83 = 0{,}17 = 17\%$ der von der Dampfmaschine thatsächlich geleisteten Arbeit durch Reibung u. s. w. verloren.

8) Wie viel Pferdestärken sind erforderlich, um mit einer Pumpe stündlich 120 cbm Wasser auf eine Höhe von 50 m zu heben, wenn c zu 1,3 angenommen wird?

Das pro Sekunde zu hebende Wasserquantum ist $= \frac{120}{60 \cdot 60} =$ 0,033 cbm; mithin nach Formel 177):

$A = 13{,}3 \cdot Q_s \cdot H \cdot c = 13{,}3 \cdot 0{,}033 \cdot 50 \cdot 1{,}3 = 28{,}5$ Pferdestärken.

Übungsbeispiele:

1) Welche theoretische Wassermenge Q_t liefert eine einfach wirkende Pumpe, deren Kolbendurchmesser 80 mm und deren Hub 300 mm beträgt, bei jedem einzelnen Hube?

Lösung: $Q_t = 1{,}51$ Liter.

2) Welche effektive Wassermenge Q_e liefert dieselbe Pumpe bei jedem Hube, wenn $c = 0{,}8$ angenommen wird?

Lösung: $Q_e = 1{,}21$ Liter.

3) Welche effektive Wassermenge Q_e liefert dieselbe Pumpe bei 20 Hüben, wenn sie doppelt wirkend ist?

Lösung: $Q_e = 48{,}4$ Liter.

4) Wieviel Liter Wasser liefert effektiv eine einfach wirkende Pumpe in einer Stunde, wenn der Durchmesser des Kolbens 140 mm und dessen Hub 420 mm beträgt, und wenn die Pumpe 12 Kolbenspiele in der Minute macht? ($c = 0{,}8$.)

Lösung: $Q_e = 3912$ Liter.

5) Ein doppelt wirkendes Gebläse von 1,3 m Cylinderdurchmesser und 1,75 m Kolbenhub macht 18 Kolbenspiele in der Minute. Wie grofs ist die pro Sekunde gelieferte theoretische Windmenge?

Lösung: $Q_t = 1{,}393$ cbm.

6) Welche Zeit t braucht eine doppelt wirkende Pumpe von 500 mm olbendurchmesser und 1400 mm Hublänge bei 10 Kolbenspielen in er Minute, um einen Wasserbehälter von 6 m Durchmesser und 2,5 m öhe vollkommen mit Wasser zu füllen? (c = 0,8.)

Lösung: t = 16,1 Minuten = 16 Min. 6 Sek.

7) Welchen Durchmesser d mufs der Cylinder einer doppelt wirkenden umpe erhalten, welche bei 10 Kolbenspielen in der Minute und einer ublänge von 0,5 m ein effektives Wasserquantum von 300 Liter liefert?

Lösung: d = 213 mm.

8) Ein Wasserbehälter von 4 m Länge, 3 m Breite und 2,5 m öhe soll durch eine einfach wirkende Pumpe in 30 Minuten gefüllt erden. Das Ausflufsrohr der Pumpe befindet sich 15 m über dem iedrigsten Wasserspiegel. Wie grofs ist die aufzuwendende Arbeit in ferdestärken, welche der Betrieb dieser Pumpe erfordert?

Lösung: A = 3,33 Pferdestärken.

Zweiundzwanzigstes Kapitel.

Berechnung der Riemen.

Nachdem bereits in Kapitel XV, Seite 127) die Be-chnung der Durchmesser und der Übersetzungsverhältnisse er Riemenscheiben besprochen wurde, ist es noch notwendig, e Bestimmung der Riemenabmessungen selbst kennen zu rnen. Da die Riemendicke durch die Beschaffenheit der zur erstellung der Riemen verwendeten Häute innerhalb gewisser renzen vorgeschrieben ist, wird es sich unter Zugrundelegung ner bestimmten Dicke des Riemens namentlich um die Berech-ng der dieser Dicke entsprechenden Riemenbreite handeln.

Bezeichnet man mit

N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken;

P den am Umfange der Scheibe wirksamen, zu übertragenden Druck in kg;

R den Halbmesser der getriebenen Scheibe in mm;

v die Riemengeschwindigkeit in m pro Sekunde;

n die Anzahl der Umdrehungen der getriebenen Scheibe in der Minute;

b die Breite, d die Dicke } des Riemens in mm,

ist für die Geschwindigkeit des Riemens:*)

$$v = \frac{2 . R . \pi}{1000} \cdot \frac{n}{60};$$ für die Arbeit aber:

$$75 . N = P . v.$$

---

*) Es sind z. B. 5 mm $= \frac{5}{1000}$ m; mithin:

R mm $= \frac{R}{1000}$ m. Dementsprechend nach Formel 4), nn d = 2 . R gesetzt wird:

$$v = \frac{\pi . d . n}{60} = \pi \cdot \frac{n}{60} \cdot \frac{2 . R}{1000} = \frac{2 . R . \pi}{1000} \cdot \frac{n}{60}.$$

Multipliziert man beide Gleichungen, so folgt:

$$P = 716200 \cdot \frac{N}{R \cdot n}.$$

Da der Riemen in erster Linie auf absolute Festigkeit beansprucht wird, so ist sein Querschnitt F der auf ihn einwirkenden Kraft direkt proportional. (Vergl. Kapitel XVIII, 1.)

Es ist mithin auch:

$$P = F \cdot k = b \cdot d \cdot k$$

wenn k einen Erfahrungskoeffizienten bedeutet, welcher = 0,100 bis 0,125 kg pro qmm Riemenquerschnitt ist.

Setzt man die beiden vorstehenden Werte von P einander gleich, so folgt:

$$b \cdot d \cdot k = 716200 \cdot \frac{N}{R \cdot n}, \text{ mithin:}$$

$$b = \frac{1}{d \cdot k} \cdot 716200 \cdot \frac{N}{R \cdot n}.$$

$$b = \frac{1}{d \cdot k} \cdot 716{,}2 \cdot \left(1000 \cdot \frac{N}{R \cdot n}\right) \quad \ldots \quad 183)$$

Für einfache Riemen von 4 bis 8 mm Dicke ergiebt sich auf Grund vorstehender Formeln folgende Tabelle:

Riemenbreite b in mm	Riemendicke d in mm	k = 0,100 kg pro qmm			k = 0,125 kg pro qmm		
		Übertragbare Kraft pro 1 mm Riemenbreite in kg	Gesamte übertragbare Kraft P in kg	Werte von $1000 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$	Übertragbare Kraft pro 1 mm Riemenbreite in kg	Gesamte übertragbare Kraft P in kg	Werte von $1000 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$
50	4	0,4	20	0,0279	0,500	25,00	0,0349
60	4	0,4	24	0,0335	0,500	30,00	0,0419
70	5	0,5	35	0,0489	0,625	43,75	0,0611
80	5	0,5	40	0,0558	0,625	50,00	0,0698
90	6	0,6	54	0,0754	0,750	67,50	0,0942
100	6	0,6	60	0,0837	0,750	75,00	0,1047
110	6	0,6	66	0,0922	0,750	82,50	0,1152
120	7	0,7	84	0,1173	0,875	105,00	0,1466
130	7	0,7	91	0,1271	0,875	113,75	0,1588
140	7	0,7	98	0,1368	0,875	122,50	0,1710
150	7	0,7	105	0,1466	0,875	131,25	0,1833
160	7	0,7	112	0,1564	0,875	140,00	0,1955
180	7	0,7	126	0,1759	0,875	157,50	0,2199
200	7	0,7	140	0,1955	0,875	175,00	0,2444
250	8	0,8	200	0,2793	1,000	250	0,3491
300	8	0,8	240	0,3351	1,000	300	0,4189
350	8	0,8	280	0,3910	1,000	350	0,4887
400	8	0,8	320	0,4468	1,000	400	0,5585
450	8	0,8	360	0,5027	1,000	450	0,6283
500	8	0,8	400	0,5585	1,000	500	0,6981

Gelangen Doppelriemen zur Anwendung, so erhalten dieselben das 0,7fache der für einfache Riemen berechneten Breite; man vermeide für derartige Riemen die Scheibendurchmesser zu klein zu nehmen.

Die Breite der Riemenscheibe sei um $\frac{1}{4}$ der Breite des zugehörigen Riemens gröfser als dieser. Ist die Scheibe gewölbt, so soll die Wölbung nur $\frac{1}{20}$ der Riemenbreite betragen, da im anderen Falle leicht am Scheitel der Wölbung eine bedeutende Vergröfserung der Spannung eintritt, wodurch im Riemen Risse entstehen, welche die Dauer seiner Betriebsfähigkeit bedeutend verkürzen.

Beispiele:

1) Wie breit mufs ein 6 mm dicker Riemen sein, welcher 3 Pferdestärken bei 75 Umdrehungen pro Minute auf eine Riemenscheibe von 450 mm Halbmesser übertragen soll?

Nimmt man k zu 0,1 an, so folgt aus Formel 183):

$$b = \frac{716{,}2}{d \cdot k} \cdot 1000 \cdot \frac{N}{R \cdot n} = \frac{716{,}2}{6 \cdot 0{,}1} \cdot 1000 \cdot \frac{3}{450 \cdot 75} = 106 \text{ mm}.$$

Wollte man den Wert nach vorstehender Tabelle bestimmen, so ist der Wert $1000 \cdot \frac{N}{R \cdot n} = 1000 \cdot \frac{3}{450 \cdot 75} = 0{,}0888$ zu berechnen und findet man, da in der 5. Spalte dieser Wert zwischen denen der 6. und 7. Zeile von oben liegt, die entsprechende Riemenbreite b auch zwischen den Werten der 6. und 7. Zeile der ersten Spalte liegend. Diese Werte sind aber 100 und 110 mm; mithin der in der Mitte liegende Wert = 105 mm.

2) Zum Betriebe eines Sägegatters ist eine Arbeitsleistung von 6 Pferdestärken erforderlich. Eine auf der Kurbelwelle des Gatters sitzende Riemenscheibe von 400 mm Halbmesser soll 140 Umdrehungen pro Minute machen. Wie breit mufs der 6 mm starke Riemen werden?

Nimmt man hier k = 0,125 an, so folgt aus Formel 183):

$$b = \frac{716{,}2}{d \cdot k} \cdot 1000 \cdot \frac{N}{R \cdot n} = \frac{716{,}2}{6 \cdot 0{,}125} \cdot 1000 \cdot \frac{6}{400 \cdot 140} = \text{rund } 102 \text{ mm}.$$

Der Wert $1000 \cdot \frac{N}{R \cdot n} = 1000 \cdot \frac{6}{400 \cdot 140} = 0{,}1072$ ergiebt nach der Tabelle ziemlich genau dasselbe Resultat.

3) Auf der Welle eines Vorgeleges sitzt eine Riemenscheibe von 150 mm Halbmesser, welche 400 Umdrehungen pro Minute macht und einen Ventilator mit 2000 Umdrehungen pro Minute treibt. Zum Betriebe des Ventilators sind 4 Pferdestärken notwendig; wie grofs sind die erforderlichen Riemenabmessungen, wenn die Riemenscheibe auf dem Ventilator 60 mm Halbmesser hat?

Um die Riemenabmessungen nach der Tabelle zu bestimmen, berechne man:

a) für die Riemenscheibe des Vorgeleges den Wert

$$1000 \cdot \frac{N}{R \cdot n} = 1000 \cdot \frac{4}{150 \cdot 400} = 0{,}0667.$$

Setzt man hier k = 0,125, so bedingt die Tabelle einen Riemen *von rund 80 mm Breite* und 5 mm Dicke;

b) für die Riemenscheibe auf dem Ventilator den Wert

$$1000 \cdot \frac{N}{R \cdot n} = \frac{1000 \cdot 4}{60 \cdot 2000} = 0{,}0333.$$

Setzt man hier $k = 0{,}100$, so bedingt die Tabelle einen Riemen von 60 mm Breite und 4 mm Dicke.

4) Wie viel Pferdestärken überträgt ein 250 mm breiter und 8 mm dicker Riemen, wenn der Halbmesser der getriebenen Scheibe = 600 mm und die Umdrehungen zu 120 pro Minute angenommen werden?

Aus der vorstehend entwickelten Formel: $P = 716200 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$ folgt, wenn den Riemenabmessungen entsprechend, nach der Tabelle $P = 200$ kg und $k = 0{,}100$ angenommen werden:

$$N = \frac{P \cdot R \cdot n}{716200} = \frac{200 \cdot 600 \cdot 120}{716200} = \text{rund } 20 \text{ Pferdestärken.}$$

5) Wie grofs ist hierbei die Riemengeschwindigkeit v in Meter pro Sekunde?

Aus der Formel für die Riemengeschwindigkeit: $P \cdot v = 75 \cdot N$ folgt:

$$v = \frac{75 \cdot N}{P} = \frac{75 \cdot 20}{200} = 7{,}5 \text{ m.}$$

Übungsbeispiele:

1) Wie stark mufs ein 150 mm breiter Riemen werden, welcher 6 Pferdestärken bei 80 Umdrehungen pro Minute auf eine Riemenscheibe von 500 mm Halbmesser übertragen soll? ($k = 0{,}100$.)

Lösung: $d = 7$ mm.

2) Von der Kurbelwelle einer 5 Pferdestärken leistenden Dampfmaschine wird eine Vorgelegewelle angetrieben, auf welcher eine 1200 mm im Durchmesser haltende Riemenscheibe sitzt. Welche Breite erhält der zum Betriebe dieser Vorgelegewelle dienende Riemen, wenn die Welle 90 Umdrehungen pro Minute macht? ($k = 0{,}100$.)

Lösung: $b = 110$ mm.

3) Wie viel Pferdestärken können durch einen 200 mm breiten und 7 mm starken Riemen übertragen werden, wenn der Halbmesser der getriebenen Scheibe zu 500 mm und die Anzahl der Umdrehungen pro Minute zu 150 angenommen werden? ($P = 140$ kg; $k = 0{,}1$.)

Lösung: 14,7 Pferdestärken.

4) Am Umfange einer Riemenscheibe wird durch einen Riemen ein Zug von 60 kg ausgeübt und durch diese Kraft eine Arbeit von 8 Pferdestärken geleistet. Wie grofs ist die Riemengeschwindigkeit in m pro Sekunde?

Lösung: $v = 10$ m.

Dreiundzwanzigstes Kapitel.

Berechnung der Zahnräder.

Die Zahnräder dienen zur Übertragung der drehenden Bewegung von einer Welle auf eine andere derart, dafs die Zähne des einen sich drehenden Rades, in die Zahnlücken *des anderen* eingreifen und so auf dieses die Bewegung fort*pflanzen.*

Im Maschinenbau fertigt man die Zähne zweier zusammen arbeitender Räder entweder an beiden Rädern aus Eisen, in welchem Falle die Räder Eisenräder genannt werden, oder es erhält nur das eine Rad eiserne, das andere dagegen hölzerne Zähne, in welchem Falle die Räder Holz-Eisenräder heifsen.

Die aus den Radmittelpunkten beschriebenen, sich berührenden Kreise eines Räderpaares, welche jederzeit gleiche Umfangsgeschwindigkeiten*) haben, und welche man als die Berührungskreise der noch nicht mit Zähnen versehenen Räder betrachten kann, nennt man Teilkreise. Auf diesen wird die Teilung, d. i. die Entfernung von der einen Flanke eines Zahnes bis zur entsprechenden des benachbarten Zahnes (Fig. 106) aufgetragen, und mufs dieselbe für je zwei zusammen arbeitende Räder stets gleich grofs sein. Die Zähnezahlen stehen somit in demselben Verhältnis wie die Umfänge, oder die Durchmesser, oder die Halbmesser der zugehörigen Teilkreise; d. h. besitzt ein Zahnrad von 10 cm Teilkreisdurchmesser 25 Zähne, so mufs ein mit diesem in Eingriff stehendes Rad von 30 cm Teilkreisdurchmesser, da der letztere Durchmesser 3 mal gröfser ist als der erstere, auch 3 mal soviel Zähne, also $= 3 \cdot 25 = 75$ Zähne erhalten.

Für die Berechnung der Zähne der Zahnräder bezeichne:

t die Teilung,
Z die Zähnezahl,
R den Teilkreishalbmesser in cm } des Rades;

P den Zahndruck in kg $= 71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$ (siehe Kap. 22, Seite 214 und Anmerkung Seite 221);
s die Zahnstärke auf dem Teilkreise gemessen;
b die Zahnbreite;
l die Zahnlänge;
N die Anzahl der zu übertragenden Pferdestärken;
n die Anzahl der Umdrehungen pro Minute.

Um die Beziehungen zwischen Z, t und R festzustellen, geht man von der Thatsache aus, dafs das Produkt aus Zähnezahl und Teilung gleich dem Umfange des zugehörigen Teilkreises ist. Es wird mithin:

$$Z \cdot t = 2 \cdot R \cdot \pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 184)$$

Folglich: $$t = \frac{2 \cdot R}{Z} \cdot \pi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 185)$$

$$R = \frac{Z}{2} \cdot \frac{t}{\pi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 186)$$

*) *Vergl. Seite 129.)*

$$Z = 2 \,.\, R \,.\, \frac{\pi}{t} = \frac{2 \,.\, R}{\frac{t}{\pi}} \quad \ldots\ldots\ldots 187)$$

Um für den Halbmesser der Räder möglichst bequeme Zahlen zu erhalten, wählt man die Teilung stets als ein Vielfaches der Zahl π, welche Forderung Formel 185) bereits zum Ausdruck bringt. Zur Vereinfachung der für die vorstehenden Formeln erforderlichen Berechnungen diene nachstehende Tabelle:

t	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{\pi}{t}$	t	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{\pi}{t}$	t	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{\pi}{t}$	t	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{\pi}{t}$
14	4,4563	0,2244	9	2,8648	0,3491	4,5	1,4324	0,6981	2,2	0,7003	1,4280
13	4,1380	0,2417	8	2,5465	0,3927	4,0	1,2732	0,7854	1,8	0,5730	1,7453
12	3,8197	0,2618	7	2,2282	0,4488	3,5	1,1141	0,8976	1,5	0,4775	2,0944
11	3,5014	0,2856	6	1,9099	0,5236	3,0	0,9549	1,0472	1,2	0,3820	2,6180
10	3,1831	0,3142	5	1,5915	0,6283	2,6	0,8276	1,2083	1,0	0,3183	3,1416

Erscheinen die Werte von t nicht in so abgerundeten Werten, wie dies in vorstehender Tabelle der Fall ist, so kann die folgende benützt werden:

t	$\frac{t}{\pi}$	t	$\frac{t}{\pi}$	t	$\frac{t}{\pi}$	t	$\frac{t}{\pi}$	t	$\frac{t}{\pi}$
14,1372	4,5	8,7965	2,8	5,6549	1,8	3,1416	1,0	1,8850	0,6
12,5664	4,0	7,8540	2,5	5,0265	1,6	2,8274	0,9	1,5708	0,5
11,3097	3,6	6,9115	2,2	4,3982	1,4	2,5133	0,8	1,2566	0,4
10,0531	3,2	6,2832	2,0	3,7699	1,2	2,1991	0,7	0,9425	0,3

Beispiele:

1) Ein Rad von 90 cm Teilkreishalbmesser hat eine Teilung t = 3,5 cm. Wie viel Zähne erhält das Rad?

Aus Formel 187) folgt:

$$Z = 2 \,.\, R \,.\, \frac{\pi}{t} = \frac{2 \,.\, 90 \,.\, 3{,}14}{3{,}5} = 162 \text{ Zähne.}$$

2) Wie grofs ist die Teilung, wenn ein Rad einen Teilkreishalbmesser von 60 cm und 80 Zähne hat?

Aus Formel 185) folgt:

$$t = \frac{2 \,.\, R}{Z} \,.\, \pi = \frac{2 \,.\, 60 \,.\, 3{,}14}{80} = 4{,}71 \text{ cm.}$$

3) Ein Rad soll 70 Zähne und 3 cm Teilung erhalten. Wie grofs ist der Teilkreishalbmesser?

Für t = 3 giebt die erste der beiden vorstehenden Tabellen den Wert $\frac{t}{\pi} = 0{,}9549$; mithin nach Formel 186):

$$R = \frac{Z}{2} \,.\, \frac{t}{\pi} = 35 \,.\, 0{,}9549 = 33{,}42 \text{ cm.}$$

4) Welche Zähnezahl erhält ein Rad von 60 cm Teilkreishalbmesser bei 5 cm Teilung?

Für $t = 5$ giebt die vorgenannte Tabelle den Wert $\frac{\pi}{t} = 0{,}6283$; es folgt demnach aus Formel 187):

$$Z = 2 . R . \frac{\pi}{t} = 2 . 60 . 0{,}6283 = 75 \text{ Zähne.}$$

5) Bei der Aufnahme eines vorhandenen Rades wurde die Teilung durch Rechnung zu 2,1991 cm ermittelt. Wie grofs wird der Teilkreishalbmesser eines neuen Rades von 60 Zähnen?

Für die genannte Teilung giebt die letzte Tabelle den Wert $\frac{t}{\pi} = 0{,}7$; mithin nach Formel 186):

$$R = \frac{Z}{2} . \frac{t}{\pi} = 30 . 0{,}7 = 21 \text{ cm.}$$

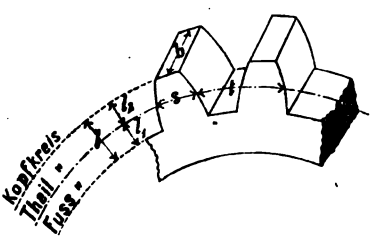
6) Für ein neu zu konstruierendes Zahnrad sind die Teilung $t = 1{,}2\ \pi$ und der Teilkreisdurchmesser zu 120 cm vorgeschrieben. Wie grofs ist die Teilung in cm und wieviel Zähne erhält das Rad?

Für den Wert $\frac{t}{\pi} = 1{,}2$ ergiebt sich aus der letzten Tabelle Seite 218) die Teilung $t = 3{,}7699$ cm.

Für Z folgt aus Formel 187) unter Benützung der genannten Tabelle:

$$Z = \frac{2 . R}{\frac{t}{\pi}} = \frac{120}{1{,}2} = 100 \text{ Zähne.}$$

Fig. 106.



Bei Feststellung der Hauptabmessungen der Zähne geht man, indem man die Verhältnisse berücksichtigt, unter denen die Räder arbeiten, von der Zahnstärke s, d. i. der Stärke des Zahnes auf dem Teilkreise gemessen, aus.

In der Praxis ist es vielfach üblich, die Abmessungen der Zähne auf die Teilung zu beziehen; die gebräuchlichen Werte sollen mit angeführt werden. Nennt man wie früher, die Teilung t, so wird die Zahnstärke

1) bei Eisen auf Eisen:

Für roh bleibende Zähne $s = \frac{19}{40} . t$ . . . . . 188)

folglich: $t = 2{,}1 . s$ . . . . . 189)

„ bearbeitete Zähne $s = \frac{19}{40} . t$ bis $\frac{39}{80} . t$. 190)

2) bei Holz auf Eisen:

Für den Eisenzahn $s = \frac{16}{40} . t = 0{,}4 . t$ . . . 191)

„ „ Holzzahn $s = \frac{23}{40} . t$ . . . . . 192)

Die Zahnwurzel, d. i. die Länge des Zahnes zwischen Fufskreis und Teilkreis, wird:

$$l_1 = 0{,}4 \,.\, t = 0{,}84 \,.\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 193)$$

Die Zahnkrone, d. i. die Länge des Zahnes zwischen Teilkreis und Kopfkreis, wird:

$$l_2 = 0{,}3 \,.\, t = 0{,}63 \,.\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 194)$$

Aus Formel 193 und 194) folgt mithin für die Zahnlänge l:

$$l = l_1 + l_2 = 0{,}4 \,.\, t + 0{,}3 \,.\, t$$
$$= 0{,}7 \,.\, t = 1{,}47 \,.\, s \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 195)$$

Ferner ergiebt sich der tangentiale Spielraum zwischen

zwei unbearbeiteten Zähnen $= \frac{t}{20} = 0{,}105 \,.\, s$;

zwischen zwei bearbeiteten Zähnen $= \frac{t}{40} = 0{,}053 \,.\, s$.

Der Spielraum in radialer Richtung $= \frac{t}{10} = 0{,}21 \,.\, s$.

Für die Zahnbreite b, welche gewöhnlich gleich der Radbreite ist, sind die Betriebs-Verhältnisse, unter denen die Räder zur Verwendung gelangen, mafsgebend. Man setzt nach *Grove:*

$b = \left\{ \begin{matrix} 2 \,.\, t \text{ bis } 2{,}5 \,.\, t \\ 4{,}2 \,.\, s \;\; „ \;\; 5{,}3 \,.\, s \end{matrix} \right\}$ für langsam laufende Räder; (z. B. Räder an Aufzugmaschinen.)

$b = \left\{ \begin{matrix} 2{,}5 \,.\, t \text{ bis } 3 \,.\, t \\ 5{,}3 \,.\, s \;\; „ \;\; 6{,}3 \,.\, s \end{matrix} \right\}$ für Transmissionsräder mit rascherem Gange und nicht bearbeiteten Zähnen.

$b = \left\{ \begin{matrix} 3 \,.\, t \text{ bis } 3{,}5 \,.\, t \\ 6{,}3 \,.\, s \;\; „ \;\; 7{,}4 \,.\, s \end{matrix} \right\}$ für schnell laufende Räder mit bearbeiteten oder durch Maschine geformten Zähnen.

$b = \left\{ \begin{matrix} 3{,}5 \,.\, t \text{ bis } 5 \,.\, t \\ 7{,}4 \,.\, s \;\; „ \;\; 10{,}5 \,.\, s \end{matrix} \right\}$ desgl. bei sehr genauer Ausführung und nicht zu starker Teilung.

Zur Ermittelung der Zahnstärke s denke man sich den ungünstigsten Fall, dafs die Kraft P nicht, wie üblich, im Teilkreise, sondern an der höchsten Kante der Zahnkrone angreift, und dafs die Zahnstärke am Fufse des Zahnes, d. h. da, wo derselbe am Radkranze haftet, gleich derjenigen im Teilkreise sei. Man kann alsdann jeden Zahn als ein Prisma betrachten, dessen eines Ende belastet und dessen anderes Ende am Zahnkranze festgehalten wird. Nach den bei Besprechung der Biegungsfestigkeit aufgestellten Formeln (Tabelle auf Seite 162 und 163) folgt für diesen Fall:

$$P \,.\, l = W \,.\, k = \frac{b \,.\, s^2}{6} \,.\, k, \text{ und damit:}$$

$$P = \frac{b \,.\, s^2}{6} \cdot \frac{k}{l}$$

wenn k gleich dem Koeffizienten der Biegungsfestigkeit für *Gufseisen ist.* Setzt man in die vorstehende Gleichung den *Wert für l* aus Formel 195) $= 1{,}47 \,.\, s$ ein, so wird:

$$P = \frac{b \cdot s^2}{6 \cdot l} \cdot k = \frac{b \cdot s^2}{6 \cdot 1{,}47 \cdot s} \cdot k, \text{ woraus}$$

$$b \cdot s = \frac{8{,}8 \cdot P}{k} \text{ folgt } \ldots\ldots\ldots\ldots 196)$$

Den Koeffizienten k, d. i. die zulässige Belastung pro 1 qcm, setzt man:

k = 450—350 kg für Räder an Aufzugmaschinen, also solchen mit geringen Geschwindigkeiten;

k = 300—250 kg für ruhig gehende Transmissionsräder mit mittlerer Geschwindigkeit;

k = 200—180 kg für Transmissionsräder mit gröfserer Geschwindigkeit und solche, welche mäfsigen Stöfsen ausgesetzt sind;

k = 100—80 kg für Räder, welche starke Stöfse erleiden, oder welche sich in der Nähe grofser Schwungräder befinden.

Nimmt man für Windenräder k = 350 kg und $b = 2 \cdot t = 4{,}2 \cdot s$ an, so ergiebt sich aus Formel 196):

$$b \cdot s = \frac{8{,}8 \cdot P}{k} \text{ oder } 4{,}2 \cdot s^2 = \frac{8{,}8 \cdot P}{350}, \text{ folglich:}$$

$$s^2 = 0{,}0059 \cdot P.$$

$$s = \sqrt{0{,}0059 \cdot P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} \text{ cm } \ldots\ldots 197)$$

Setzt man in Formel 197) den Wert $P = 71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$ ein, so wird:*)

$$s = 0{,}08 \cdot \sqrt{71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}} = 0{,}08 \cdot 268 \cdot \sqrt{\frac{N}{R \cdot n}}$$

$$= 21{,}4 \cdot \sqrt{\frac{N}{R \cdot n}} \text{ cm } \ldots\ldots\ldots\ldots 198)$$

Um für schneller laufende Transmissionsräder, welche mäfsige Stöfse erleiden, die Zahnstärke zu finden, erhält man, wenn k = 180 kg und $b = 3 \cdot t = 6{,}3 \cdot s$ angenommen werden, aus Formel 196):

$$b \cdot s = \frac{8{,}8 \cdot P}{k} \text{ oder } 6{,}3 \cdot s^2 = \frac{8{,}8 \cdot P}{180}, \text{ folglich:}$$

$$s^2 = 0{,}0079 \cdot P \text{ und}$$

$$s = \sqrt{0{,}0079 \cdot P} = 0{,}09 \cdot \sqrt{P} \text{ cm } \ldots\ldots 199)$$

oder wenn man auch hier $P = 71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}$ setzt:

$$s = 0{,}09 \cdot \sqrt{71620 \cdot \frac{N}{R \cdot n}} = 24{,}1 \cdot \sqrt{\frac{N}{R \cdot n}} \text{ cm } \ldots\ldots 200)$$

Für langsam laufende, oder starken Stöfsen ausgesetzte Transmissionsräder würden zur Berechnung von s die dies-

*) Vergl. Seite 214 und 217). Der Wert 716200 mufs hier in 71620 übergehen, da bei Zahnrädern R in cm gegeben ist.

bezüglichen Werte von k und b in Formel 196) einzusetzen, und dann genau wie vorstehend zu verfahren sein.

Beispiele:

1) Für den auf Seite 103, Beispiel 4) in seinem Vorgelege berechneten Krahn sollen die Zahnstärken bestimmt werden.

Die Zahndrucke wurden ermittelt zu:

$$x = 120 \text{ kg und } y = 300 \text{ kg.}$$

Es ergiebt sich demnach für das Trieb auf der Kurbelwelle und das Rad auf der Vorgelegewelle nach Formel 197):

$$s = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{120} = 0{,}88 \text{ cm;}$$

ferner für das Trieb auf der Vorgelegewelle und das Rad auf der Trommelwelle:

$$s_1 = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{300} = 1{,}4 \text{ cm.}$$

2) Welche Abmessungen erhalten die Zähne der Räder der auf Seite 102, Beispiel 1) berechneten Winde?

Der Druck zwischen den Zähnen wurde daselbst zu 133,3 kg gefunden; es ergiebt sich mithin aus Formel 197):

$$s = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{133{,}3} = 0{,}9 \text{ cm.}$$

Es folgt demnach

aus Formel 189): Teilung $t = 2{,}1 \cdot s = 2{,}1 \cdot 0{,}9 = 1{,}9$ cm.
„ „ 195): Zahnlänge $l = 0{,}7 \cdot t = 0{,}7 \cdot 1{,}9 = 1{,}3$ cm.
„ „ und Zahnbreite $b = 2 \cdot t = 2 \cdot 1{,}9 = 3{,}8$ cm.

3) Für die auf Seite 103, Beispiel 3) berechnete Winde sollen die Zahndimensionen und die Zähnezahlen der zugehörigen Räder ermittelt werden.*)

a) Der Druck zwischen den Zähnen des Triebes auf der Kurbelwelle und denen des Rades auf der Vorgelegewelle ist der Rechnung entsprechend = 160 kg; es wird mithin:

$$s = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{160} = 1 \text{ cm, folglich:}$$

Teilung $t = 2{,}1 \cdot s = 2{,}1 \cdot 1 = 2{,}1$ cm.
Zahnlänge $l = 0{,}7 \cdot t = 0{,}7 \cdot 2{,}1 = 1{,}5$ cm.
Zahnbreite $b = 2 \cdot t = 2 \cdot 2{,}1 = 4{,}2$ cm.

Die Zähnezahl für das Trieb ist nach Formel 187):

$$Z = \frac{2 \cdot r_1 \cdot \pi}{t} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 3{,}14}{2{,}1} = 18 \text{ Zähne;}$$

die Zähnezahl für das Rad ist:

$$Z_1 = \frac{2 \cdot R_2 \cdot \pi}{t} = \frac{2 \cdot 50 \cdot 3{,}14}{2{,}1} = 149 \text{ Zähne.}$$

b) Der Druck zwischen den Zähnen des Triebes auf der Vorgelegewelle und denen des Rades auf der Trommelwelle ist der Rechnung entsprechend = 800 kg, es wird mithin:

---

*) Bei genauer Berechnung der Zähnezahlen nach den gegebenen Werten der Halbmesser der Triebe und Räder zeigt sich, daſs die Zähnezahlen keine ganzen Zahlen werden. Da jedoch unbedingt ganze Zahlen erzielt werden müssen, so würden nach den ermittelten Zähnezahlen die Halbmesser entsprechend zu korrigieren sein; das Beispiel soll also hier *nur den Gang* der Rechnung für ähnliche Fälle klarlegen und sind in *den folgenden* Beispielen richtige Verhältnisse in Betracht gezogen.

$s = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{800} = 2{,}3$ cm; folglich:

Teilung $t = 2{,}1 \cdot s = 2{,}1 \cdot 2{,}3 = 4{,}8$ cm.
Zahnlänge $l = 0{,}7 \cdot t = 0{,}7 \cdot 4{,}8 = 3{,}4$ cm.
Zahnbreite $b = 2 \cdot t = 2 \cdot 4{,}8 = 9{,}6$ cm.

Die Zähnezahl für das Trieb ist nach Formel 187):

$$Z = \frac{2 \cdot r_2 \cdot \pi}{t} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 3{,}14}{4{,}8} = 13 \text{ Zähne.}$$

e Zähnezahl für das Rad mufs, da sich dessen Halbmesser zu dem des iebes wie $\frac{60}{10} = \frac{6}{1} = 6$ verhält, 6 mal so grofs als die des Triebes, d. i. $6 \cdot 13 = 78$ sein.

4) An der 30 cm langen Kurbel einer Wagenwinde wirken 2 Arbeiter zusammen mit 30 kg Druck. Die Zahnstange, welche durch ein Getrieb bewegt wird, ist mit 300 kg belastet; welche Abmessungen erhält das Trieb? (Siehe Beispiel 5, S. 104.)

Es ist der Halbmesser des Triebes $r = \frac{30 \cdot 30}{300} = 3$ cm; folglich:

$s = 0{,}08 \cdot \sqrt{P} = 0{,}08 \cdot \sqrt{300} = 1{,}4$ cm.
Teilung $t = 2{,}1 \cdot s = 2{,}1 \cdot 1{,}4 = 2{,}9$ cm.
Zahnbreite $b = 2 \cdot t = 2 \cdot 2{,}9 = 5{,}8$ cm.
Zähnezahl $Z = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{t} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 3{,}14}{2{,}9} = 6{,}5.$

Die Zähnezahl 6,5 ist jedoch unmöglich; rundet man dieselbe auf 6 ab und nimmt man die Teilung $= 2{,}8274 = 0{,}9 \cdot \pi$, so wird nun der Teilkreishalbmesser des Triebes nach Formel 186):

$r = \frac{Z}{2} \cdot \frac{t}{\pi} = 3{,}5 \cdot 0{,}9 = 3{,}15$ cm. (Vergl. Tabelle Seite 218.)

5) Ein Rad von 50 cm Halbmesser soll 25 Pferdestärken mit 30 Umdrehungen übertragen. Wie stark werden die Zähne und wie grofs wird die Teilung?

Aus Formel 200) folgt:

$$s = 24{,}1 \cdot \sqrt{\frac{N}{R \cdot n}} = 24{,}1 \cdot \sqrt{\frac{25}{50 \cdot 30}} = 3{,}1 \text{ cm.}$$

$t = 2{,}1 \cdot s = 2{,}1 \cdot 3{,}1 = 6{,}5$ cm (Formel 189).

6) Für 2 Eisenräder ist das Übersetzungsverhältnis 1 : 3 gegeben. Das Trieb hat einen Halbmesser = 40 cm und soll auf das zweite Rad 25 Pferdestärken mit 36 Umdrehungen übertragen. Wie gestalten sich hierbei sämtliche Verhältnisse?

Man bestimme zunächst nach Formel 200) die Zahnstärke:

$$s = 24{,}1 \cdot \sqrt{\frac{N}{R \cdot n}} = 24{,}1 \cdot \sqrt{\frac{20}{40 \cdot 36}} = 2{,}8 \text{ cm.}$$

Aus dieser erhält man die Teilung nach Formel 189):

$$t = 2{,}1 \cdot s = 2{,}1 \cdot 2{,}8 = 5{,}9 \text{ cm.}$$

Um nun für die Teilkreisdurchmesser und die Zähnezahlen ganze Zahlen zu erhalten, korrigiere man die Teilung auf $t = 2 \cdot \pi = 6{,}2832$. Es ergeben sich alsdann:

Aus Formel 188): Zahnstärke $s = \frac{19}{40} \cdot t = \frac{19 \cdot 6{,}2832}{40} = 2{,}9$ cm.

Aus Formel 187): Zähnezahl $Z = \frac{2 \cdot R}{\frac{t}{\pi}} = \frac{2 \cdot 40}{2} = 40$ Zähne.

Folglich: Zähnezahl des Rades $Z_1 = 40 \,.\, 3 = 120$ Zähne.
Teilkreishalbmesser des Rades $R_1 = 40 \,.\, 3 = 120$ cm; ferner:
Aus Formel 193): Zahnwurzel $l_1 = 0{,}4 \,.\, t = 0{,}4 \,.\, 6{,}2832 = 2{,}5$ cm.
„ „ 194): Zahnkrone $l_2 = 0{,}3 \,.\, t = 0{,}3 \,.\, 6{,}2832 = 1{,}9$ cm.
„ „ 195): Zahnlänge $l = 0{,}7 \,.\, t = 0{,}7 \,.\, 6{,}2832 = 4{,}4$ cm.

Sind die Zähne unbearbeitet geblieben, so wird der tangentiale Spielraum:

$$\frac{t}{20} = \frac{6{,}2832}{20} = 0{,}3 \text{ cm, und der radiale:}$$

$$\frac{t}{10} = \frac{6{,}2832}{10} = 0{,}6 \text{ cm.}$$

Zahnbreite: $3 \,.\, t = 3 \,.\, 6{,}2832 = 19$ cm.

7) Für ein Paar Holz-Eisenräder wurde die Teilung $t = 2{,}8 \,.\, \pi = 8{,}7965$ ermittelt. Wie grofs sind die Zahnstärken zu nehmen?

Für den Eisenzahn wird nach Formel 191):

$$s = \frac{16}{40} \,.\, t = \frac{16 \,.\, 8{,}7965}{40} = 3{,}5 \text{ cm und}$$

für den Holzzahn nach Formel 192):

$$s = \frac{23}{40} \,.\, t = \frac{23 \,.\, 8{,}7965}{40} = 5{,}06 \text{ cm.}$$

Übungsbeispiele:

1) Ein Stirnrad hat einen Teilkreishalbmesser von 85 cm und eine Teilung $t = 4{,}5$ cm. Wieviel Zähne erhält das Rad?

Lösung: $Z = 118$.

2) Welchen Teilkreishalbmesser erhält ein Rad, wenn die Zähnezahl $z = 64$ und die Teilung $t = 2{,}6$ cm betragen soll?

Lösung: $R = 265$ mm.

3) Welche Zähnezahl erhält ein Rad, wenn dasselbe einen Teilkreishalbmesser von 75 cm und eine Teilung von 3,5 cm erhalten soll?

Lösung: $Z = 135$.

4) Zwei parallele Wellen sollen durch zwei Stirnräder von 24 und 120 Zähnen verbunden werden; die Mittenentfernung der beiden Wellen betrage 84 cm. Welchen Teilkreishalbmesser und welche Teilung erhalten die beiden Räder?

Lösung: $R = 140$ bezw. 700 mm; $t = 3{,}7$ cm.

5) Ein Stirnrad soll einen Zahndruck von 600 kg aufnehmen; wie grofs mufs die Teilung bei diesem Rade genommen werden?

Lösung: $t = 4{,}2$ cm.

6) Durch ein auf einer Wasserradwelle sitzendes Zahnrad von 4 m Durchmesser, welches 6 Umdrehungen pro Minute macht, sollen 40 Pferdestärken auf eine andere Welle übertragen werden, welche 30 Umdrehungen pro Minute machen soll. Welche Abmessungen erhalten die Zähne, und welche Zähnezahlen erhält das Rad auf der Wasserradwelle bezw. Triebwelle?

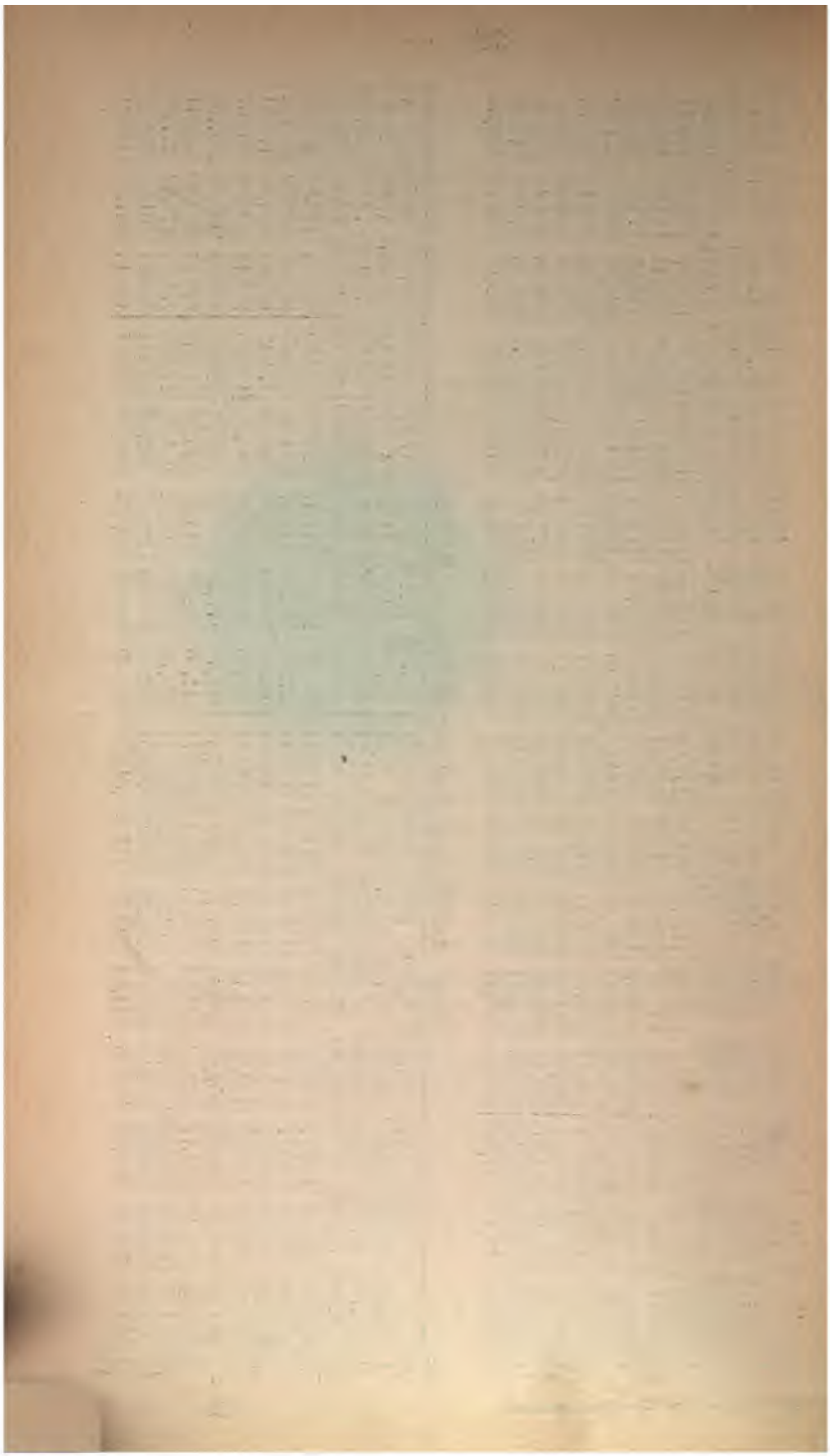
Lösung: $s = 44$ mm; $z = 136$.
$t = 92{,}4$ mm; $z_1 = 27$.

Preufs. Achtel- und Sechzehntel-Zolle = Millimeter.

Zoll	0	1/16	1/8	3/16	1/4	5/16	3/8	7/16	1/2	9/16	5/8	11/16	3/4	13/16	7/8	15/16
0		1,635	3,269	4,904	6,539	8,173	9,808	11,443	13,077	14,712	16,347	17,981	19,616	21,250	22,885	24,520
1	26,154	27,789	29,424	31,058	32,693	34,328	35,962	37,597	39,232	40,866	42,501	44,136	45,770	47,405	49,040	50,674
2	52,309	53,944	55,578	57,213	58,848	60,482	62,117	63,751	65,386	67,021	68,655	70,290	71,925	73,559	75,194	76,829
3	78,463	80,098	81,733	83,367	85,002	86,637	88,271	89,906	91,541	93,175	94,810	96,445	98,079	99,714	101,35	102,98
4	104,62	106,25	107,89	109,52	111,16	112,79	114,43	116,06	117,70	119,33	120,96	122,60	124,23	125,87	127,50	129,14
5	130,77	132,41	134,04	135,68	137,31	138,95	140,58	142,21	143,85	145,48	147,12	148,75	150,39	152,02	153,66	155,29
6	156,93	158,56	160,20	161,83	163,47	165,10	166,73	168,37	170,00	171,64	173,27	174,91	176,54	178,18	179,81	181,45
7	183,08	184,72	186,35	187,99	189,62	191,25	192,89	194,52	196,16	197,79	199,43	201,06	202,70	204,33	205,97	207,60
8	209,24	210,87	212,50	214,14	215,77	217,41	219,04	220,68	222,31	223,95	225,58	227,22	228,55	230,49	232,12	233,76
9	235,39	237,02	238,66	240,29	241,93	243,56	245,20	246,83	248,47	250,10	251,74	253,37	255,01	256,64	258,28	259,91
10	261,54	263,18	264,81	266,45	268,08	269,72	271,35	272,99	274,62	276,26	277,89	279,53	281,16	282,80	284,43	286,06
11	287,70	289,33	290,97	292,60	294,24	295,87	297,51	299,14	300,78	302,41	304,05	305,68	307,31	308,95	310,58	312,22
12	313,95	315,49	317,12	318,76	320,39	322,03	323,66	325,30	326,93	328,57	330,20	331,83	333,47	335,10	336,74	338,37

Engl. Achtel- und Sechzehntel-Zolle = Millimeter.

0		1,587	3,175	4,762	6,350	7,937	9,525	11,11	12,700	14,287	15,875	17,462	19,050	20,637	22,225	23,812
1	25,400	26,987	28,574	30,162	31,749	33,337	34,924	36,51	38,099	39,687	41,274	42,862	44,449	46,037	47,624	49,212
2	50,799	52,387	53,974	55,561	57,149	58,736	60,324	61,91	63,499	65,086	66,674	68,261	69,849	71,436	73,024	74,611
3	76,199	77,786	79,374	80,961	82,549	84,136	85,723	87,31	88,898	90,486	92,073	93,661	95,248	96,836	98,423	100,01
4	101,60	103,19	104,77	106,36	107,95	109,54	111,12	112,71	114,30	115,89	117,47	119,06	120,65	122,24	123,82	125,41
5	127,00	128,59	130,17	131,76	133,35	134,94	136,52	138,11	139,70	141,28	142,87	144,46	146,05	147,63	149,22	150,81
6	152,40	153,98	155,57	157,16	158,75	160,33	161,92	163,51	165,10	166,68	168,27	169,86	171,45	173,03	174,62	176,21
7	177,80	179,38	180,97	182,56	184,15	185,73	187,32	188,91	190,50	192,08	193,67	195,26	196,85	198,43	200,02	201,61
8	203,20	204,78	206,37	207,96	209,55	211,13	212,72	214,31	215,90	217,48	219,07	220,66	222,25	223,83	225,42	227,01
9	228,60	230,18	231,77	233,36	234,95	236,53	238,12	239,71	241,30	242,88	244,47	246,06	247,65	249,23	250,82	252,41
10	254,00	255,58	257,17	258,76	260,35	261,93	263,52	265,11	266,70	268,28	269,87	271,46	273,05	274,63	276,22	277,81
11	279,39	280,98	282,57	284,16	285,76	287,33	288,92	290,51	292,09	293,68	295,27	296,86	298,44	300,03	301,62	303,21
12	304,79	306,38	307,97	309,56	311,14	312,73	314,32	315,91	317,49	319,08	320,67	322,26	323,84	325,43	327,02	328,61

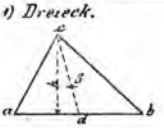
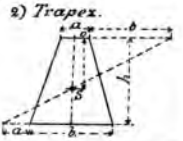
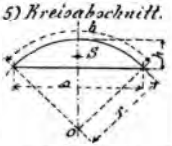
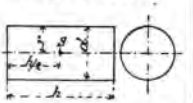
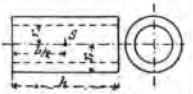
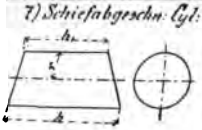


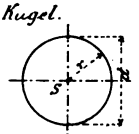
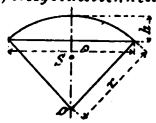
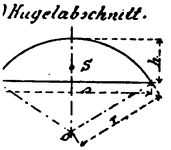
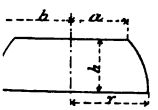
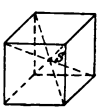
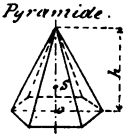
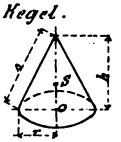
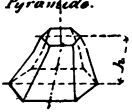
Anhang.

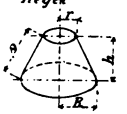
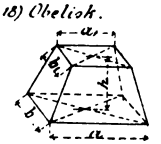
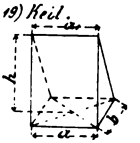
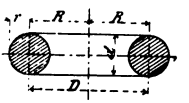
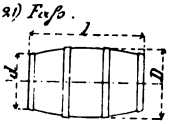
1) Tabelle

der

lächeninhalte, Oberflächen, Rauminhalte und Schwerpunktslage von Flächen und Körpern.

Körper	Flächeninhalt	Rauminhalt	Schwerpunktsl
1) *Dreieck.* 	$F = \frac{\overline{ab} \cdot h}{2}$.		$\overline{Sd} = {}^1/_3\ \overline{cd}$; $\overline{ad} = \overline{bd}$.
2) *Trapez.* 	$F = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$.		$\overline{So} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a+2}{a+}$
3) *Halbkreis*	$F = \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$.		$So = \frac{4 \cdot r}{3 \cdot \pi}$ $= 0{,}4244 \cdot r.$
4) *Kreisausschnitt.*	$F = \frac{b \cdot r}{2}$.		$\overline{So} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \cdot s}{b}$.
5) *Kreisabschnitt.* 	$F = \frac{b \cdot r - s \cdot (r-h}{2}$.		$\overline{So} = \frac{s^3}{12 \cdot F}$. F = Fläche; s = Sehne.
6) *Cylinder.* 	Mantel M $= 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ $= \pi \cdot d \cdot h$.	$I = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $= \frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot h$ $= 0{,}785\ d^2 \cdot h$.	$S = \frac{h}{2}$.
8) *Hohlcylinder.* 	$M = \pi \cdot r\,(h + h_1)$.	$I = \pi \cdot r^2 \cdot \frac{h+h_1}{2}$.	
7) *Schiefabgeschn. Cyl.* 	Innerer + äußerer Mantel = $2 \cdot \pi \cdot h \cdot (r + r_1)$.	$I = \pi \cdot h \cdot (r_1^2 - r^2)$.	$S = \frac{h}{2}$.

Körper	Flächeninhalt	Rauminhalt	Schwerpunktslage
1) *Kugel.* 	$F = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ $= 12{,}566 \cdot r^2$ $= \pi \cdot d^2.$	$I = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $= 4{,}189 \cdot r^3$ $= \frac{\pi \cdot d^3}{6}$ $= 0{,}5236 \cdot d^3.$	
2) *Kugelausschnitt.* 	$F = \frac{\pi \cdot r}{2} \cdot$ $\cdot (4 \cdot h + s).$	$I = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ $= 2{,}0944\, r^2 \cdot h.$	$\overline{So} = \frac{3}{4} \cdot \left(r - \frac{h}{2}\right).$
3) *Kugelabschnitt.* 	$F = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ $= \frac{\pi}{3} \cdot (s^2 + 4 \cdot h^2).$	$I = \pi \cdot h^2 \cdot \left(r - \frac{h}{3}\right)$ $= \pi \cdot h \cdot \left(\frac{s^2}{8} + \frac{h^2}{6}\right).$	$\overline{So} = \frac{3}{4} \cdot$ $\left(\frac{2 \cdot r - h^2}{3 \cdot r - h}\right).$
4) *Kugelzone.* 	$F = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h.$	$I = \frac{\pi \cdot h}{6} \cdot (3 \cdot a^2$ $+ 3 \cdot b^2 = h^2).$	
5) *Prisma.* 	Oberfläche = Summe der sechs Rechtecke.	Länge $\times$ Breite $\times$ Höhe.	
6) *Pyramide.* 		$I = \frac{h}{3} \times$ Grundfläche.	$\overline{So} = {}^1/_4 \cdot h.$
7) *Kegel.* 	Kegelmantel $F = \pi \cdot r \cdot s =$ $\pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}.$	$I = \frac{h}{3} \times$ Grundfläche.	$\overline{So} = {}^1/_4 \cdot h.$
8) *Abgestumpfte Pyramide.* 	Sind die Endflächen = F und f dann ist	$I = \frac{h}{3} \cdot (F + f$ $+ \sqrt{F \cdot f}).$	

Körper	Flächeninhalt	Rauminhalt	Schwerpunktsl
17) Abgestumpfter Kegel 	Mantel $= \pi \cdot s \cdot (R + r)$.	$I = (R^2 + r^2 + r \cdot R) \cdot \frac{h \cdot \pi}{3} = \frac{D^2 + d^2 + d.D}{12} \cdot \pi \cdot h.$	
18) Obelisk. 	Mantel = Summe der 4 Trapeze.	$I = \frac{h}{6} \cdot \{2a + a_1) \cdot b + (2a_1 + a) \cdot b_1\}.$	
19) Keil. 	Mantel = Summe der 2 Trapeze und der beiden Seitendreiecke.	$I = (2a + a_1) \cdot \frac{b.h}{6}.$	
20) Cylindrisch. Ring. 	$F = 4 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r = 39{,}478 \cdot R \cdot r = 9{,}87 \cdot D \cdot d.$	$I = 2 \cdot \pi^2 \cdot R \cdot r^2 = 2{,}467 \cdot D \cdot d^2.$	
21) Fass. 		$I = 1{,}10453 \cdot l \cdot (0{,}4 \cdot D^2 + 0{,}2 \cdot D \cdot d + 0{,}15 \cdot d^2).$	

2) Tabelle

der

enzen, Wurzeln, Kreisumfänge und Kreisinhalte der Zahlen 1,0 bis 100,0.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
0,0	0,00	0,000	0,00000	0,00000	0,00000	0,000000
0,1	0,01	0,001	0,31623	0,46416	0,31416	0,007854
0,2	0,04	0,008	0,44721	0,58480	0,62832	0,031416
0,3	0,09	0,027	0,54772	0,66943	0,94248	0,070686
0,4	0,16	0,064	0,63246	0,73681	1,2566	0,125664
0,5	0,25	0,125	0,70711	0,79370	1,5708	0,196350
0,6	0,36	0,216	0,77460	0,84343	1,8850	0,282743
0,7	0,49	0,343	0,83666	0,88790	2,1991	0,384845
0,8	0,64	0,512	0,89443	0,92832	2,5133	0,502655
0,9	0,81	0,729	0,94868	0,96549	2,8274	0,636173
1,0	1,00	1,000	1,0000	1,0000	3,1416	0,78540
1,1	1,21	1,331	1,0488	1,0323	3,4558	0,95033
1,2	1,44	1,728	1,0954	1,0627	3,7699	1,13097
1,3	1,69	2,197	1,1402	1,0914	4,0841	1,32732
1,4	1,96	2,744	1,1832	1,1187	4,3982	1,53938
1,5	2,25	3,375	1,2247	1,1447	4,7124	1,76715
1,6	2,56	4,096	1,2649	1,1696	5,0265	2,01062
1,7	2,89	4,913	1,3038	1,1935	5,3407	2,26980
1,8	3,24	5,832	1,3416	1,2164	5,6549	2,54469
1,9	3,61	6,859	1,3784	1,2386	5,9690	2,83529
2,0	4,00	8,000	1,4142	1,2599	6,2832	3,14159
2,1	4,41	9,261	1,4491	1,2806	6,5973	3,46361
2,2	4,84	10,648	1,4832	1,3006	6,9115	3,80133
2,3	5,29	12,167	1,5166	1,3200	7,2257	4,15476
2,4	5,76	13,824	1,5492	1,3389	7,5398	4,52389
2,5	6,25	15,625	1,5811	1,3572	7,8540	4,90874
2,6	6,76	17,576	1,6125	1,3751	8,1681	5,30929
2,7	7,29	19,683	1,6432	1,3925	8,4823	5,72555
2,8	7,84	21,952	1,6733	1,4095	8,7965	6,15752
2,9	8,41	24,389	1,7029	1,4260	9,1106	6,60520
3,0	9,00	27,000	1,7321	1,4422	9,4248	7,06858
3,1	9,61	29,791	1,7607	1,4581	9,7389	7,54768
3,2	10,24	32,768	1,7889	1,4736	10,053	8,04248
3,3	10,89	35,937	1,8166	1,4888	10,367	8,55299
3,4	11,56	39,304	1,8439	1,5037	10,681	9,07920
3,5	12,25	42,875	1,8708	1,5183	10,996	9,62113
3,6	12,96	46,656	1,8974	1,5326	11,310	10,1788
3,7	13,69	50,653	1,9235	1,5467	11,624	10,7521
3,8	14,44	54,872	1,9494	1,5605	11,938	11,3411
3,9	15,21	59,319	1,9748	1,5741	12,252	11,9459
4,0	16,00	64,000	2,0000	1,5874	12,566	12,5664
4,1	16,81	68,921	2,0248	1,6005	12,881	13,2025
4,2	17,64	74,088	2,0494	1,6134	13,195	13,8544
4,3	18,49	79,507	2,0736	1,6261	13,509	14,5220
4,4	19,36	85,184	2,0976	1,6386	13,823	15,2053
4,5	20,25	91,125	2,1213	1,6510	14,137	15,9043
4,6	21,16	97,336	2,1448	1,6631	14,451	16,6190
4,7	22,09	103,823	2,1679	1,6751	14,765	17,3494
4,8	23,04	110,592	2,1909	1,6869	15,080	18,0956
4,9	*24,01*	117,649	2,2136	1,6985	15,394	18,8574
5,0	*25,00*	125,000	2,2361	1,7100	15,708	19,6350

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
5,0	25,00	125,000	2,2361	1,7100	15,708	19,6350
5,1	26,01	132,651	2,2583	1,7213	16,022	20,4282
5,2	27,04	140,608	2,2804	1,7325	16,336	21,2372
5,3	28,09	148,877	2,3022	1,7435	16,650	22,0618
5,4	29,16	157,464	2,3238	1,7544	16,965	22,9022
5,5	30,25	166,375	2,3452	1,7652	17,279	23,7583
5,6	31,36	175,616	2,3664	1,7758	17,593	24,6301
5,7	32,49	185,193	2,3875	1,7863	17,907	25,5176
5,8	33,64	195,112	2,4083	1,7967	18,221	26,4208
5,9	34,81	205,379	2,4290	1,8070	18,535	27,3397
6,0	36,00	216,000	2,4495	1,8171	18,850	28,2743
6,1	37,21	226,981	2,4698	1,8272	19,164	29,2247
6,2	38,44	238,328	2,4900	1,8371	19,478	30,1907
6,3	39,69	250,047	2,5100	1,8469	19,792	31,1725
6,4	40,96	262,144	2,5298	1,8566	20,106	32,1699
6,5	42,25	274,625	2,5495	1,8663	20,420	33,1831
6,6	43,56	287,496	2,5690	1,8758	20,735	34,2119
6,7	44,89	300,763	2,5884	1,8852	21,049	35,2565
6,8	46,24	314,432	2,6077	1,8945	21,363	36,3168
6,9	47,61	328,509	2,6268	1,9038	21,677	37,3928
7,0	49,00	343,000	2,6458	1,9129	21,991	38,4845
7,1	50,41	357,911	2,6646	1,9220	22,305	39,5919
7,2	51,84	373,248	2,6833	1,9310	22,619	40,7150
7,3	53,29	389,017	2,7019	1,9399	22,934	41,8539
7,4	54,76	405,224	2,7203	1,9487	23,248	43,0084
7,5	56,25	421,875	2,7386	1,9574	23,562	44,1786
7,6	57,76	438,976	2,7568	1,9661	23,876	45,3646
7,7	59,29	456,533	2,7749	1,9747	24,190	46,5663
7,8	60,84	474,552	2,7928	1,9832	24,504	47,7836
7,9	62,41	493,039	2,8107	1,9916	24,819	49,0167
8,0	64,00	512,000	2,8284	2,0000	25,133	50,2655
8,1	65,61	531,441	2,8461	2,0083	25,447	51,5300
8,2	67,24	551,368	2,8636	2,0165	25,761	52,8102
8,3	68,89	571,787	2,8810	2,0247	26,075	54,1061
8,4	70,56	592,704	2,8983	2,0328	26,389	55,4177
8,5	72,25	614,125	2,9155	2,0408	26,704	56,7450
8,6	73,96	636,056	2,9326	2,0488	27,018	58,0880
8,7	75,69	658,503	2,9496	2,0567	27,332	59,4468
8,8	77,44	681,472	2,9665	2,0646	27,646	60,8212
8,9	79,21	704,969	2,9833	2,0724	27,960	62,2114
9,0	81,00	729,000	3,0000	2,0801	28,274	63,6173
9,1	82,81	753,571	3,0166	2,0878	28,588	65,0388
9,2	84,64	778,688	3,0332	2,0954	28,903	66,4761
9,3	86,49	804,357	3,0496	2,1029	29,217	67,9291
9,4	88,36	830,584	3,0659	2,1105	29,531	69,3978
9,5	90,25	857,375	3,0822	2,1179	29,845	70,8822
9,6	92,16	884,736	3,0984	2,1253	30,159	72,3823
9,7	94,09	912,673	3,1145	2,1327	30,473	73,8981
9,8	96,04	941,192	3,1305	2,1400	30,788	75,4296
9,9	98,01	970,299	3,1464	2,1472	31,102	76,9769
10,0	*100,00*	*1000,000*	3,1623	2,1544	31,416	78,5398

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
10,0	100,00	1000,000	3,1623	2,1544	31,416	78,5398
10,1	102,01	1030,301	3,1780	2,1616	31,730	80,1185
10,2	104,04	1061,208	3,1937	2,1687	32,044	81,7128
10,3	106,09	1092,727	3,2094	2,1757	32,358	83,3229
10,4	108,16	1124,864	3,2249	2,1828	32,673	84,9487
10,5	110,25	1157,625	3,2404	2,1898	32,987	86,5901
10,6	112,36	1191,016	3,2558	2,1967	33,301	88,2473
10,7	114,49	1225,043	3,2711	2,2036	33,615	89,9202
10,8	116,64	1259,712	3,2863	2,2104	33,929	91,6088
10,9	118,81	1295,029	3,3015	2,2172	34,243	93,3132
11,0	121,00	1331,000	3,3166	2,2239	34,558	95,0332
11,1	123,21	1367,631	3,3317	2,2307	34,872	96,7689
11,2	125,44	1404,928	3,3466	2,2374	35,186	98,5203
11,3	127,69	1442,897	3,3615	2,2441	35,500	100,287
11,4	129,96	1481,544	3,3764	2,2506	35,814	102,070
11,5	132,25	1520,875	3,3912	2,2572	36,128	103,869
11,6	134,56	1560,896	3,4059	2,2637	36,442	105,683
11,7	136,89	1601,613	3,4205	2,2702	36,757	107,513
11,8	139,24	1643,032	3,4351	2,2766	37,071	109,359
11,9	141,61	1685,159	3,4496	2,2831	37,385	111,220
12,0	144,00	1728,000	3,4641	2,2894	37,699	113,097
12,1	146,41	1771,561	3,4785	2,2957	38,013	114,990
12,2	148,84	1815,848	3,4928	2,3021	38,327	116,899
12,3	151,29	1860,867	3,5071	2,3084	38,642	118,823
12,4	153,76	1906,624	3,5214	2,3146	38,956	120,763
12,5	156,25	1953,125	3,5355	2,3208	39,270	122,718
12,6	158,76	2000,376	3,5496	2,3270	39,584	124,690
12,7	161,29	2048,383	3,5637	2,3331	39,898	126,677
12,8	163,84	2097,152	3,5777	2,3392	40,212	128,680
12,9	166,41	2146,689	3,5917	2,3453	40,527	130,698
13,0	169,00	2197,000	3,6056	2,3513	40,841	132,732
13,1	171,61	2248,091	3,6194	2,3573	41,155	134,782
13,2	174,24	2299,968	3,6332	2,3633	41,469	136,848
13,3	176,89	2352,637	3,6469	2,3693	41,783	138,929
13,4	179,56	2406,104	3,6606	2,3752	42,097	141,026
13,5	182,25	2460,375	3,6742	2,3811	42,412	143,139
13,6	184,96	2515,456	3,6878	2,3870	42,726	145,267
13,7	187,69	2571,353	3,7014	2,3928	43,040	147,411
13,8	190,44	2628,072	3,7148	2,3986	43,354	149,571
13,9	193,21	2685,619	3,7283	2,4044	43,668	151,747
14,0	196,00	2744.000	3,7417	2,4101	43,982	153,938
14,1	198,81	2803,221	3,7550	2,4159	44,296	156,145
14,2	201,64	2863,288	3,7683	2,4216	44,611	158,368
14,3	204,49	2924,207	3,7815	2,4272	44,925	160,606
14,4	207,36	2985,984	3,7947	2,4329	45,239	162,860
14,5	210,25	3048,625	3,8079	2,4385	45,553	165,130
14,6	213,16	3112,136	3,8210	2,4441	45,867	167,415
14,7	216,09	3176,523	3,8341	2,4497	46,181	169,717
14,8	*219,04*	3241,792	3,8471	2,4552	46,496	172,034
14,9	*222,01*	3307,949	3,8601	2,4607	46,810	174,366
15,0	*225,00*	3375,000	3,8730	2,4662	47,124	176,715

15—20

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
15,0	225,00	3375,000	3,8730	2,4662	47,124	176,715
15,1	228,01	3442,951	3,8859	2,4717	47,438	179,079
15,2	231,04	3511,808	3,8987	2,4771	47,752	181,458
15,3	234,09	3581,577	3,9115	2,4825	48,066	183,854
15,4	237,16	3652,264	3,9243	2,4879	48,381	186,265
15,5	240,25	3723,875	3,9370	2,4933	48,695	188,692
15,6	243,36	3796,416	3,9497	2,4987	49,009	191,134
15,7	246,49	3869,893	3,9623	2,5040	49,323	193,593
15,8	249,64	3944,312	3,9749	2,5093	49,637	196,067
15,9	252,81	4019,679	3,9875	2,5146	49,951	198,557
16,0	256,00	4096,000	4,0000	2,5198	50,265	201,062
16,1	259,21	4173,281	4,0125	2,5251	50,580	203,583
16,2	262,44	4251,528	4,0249	2,5303	50,894	206,120
16,3	265,69	4330,747	4,0373	2,5355	51,208	208,672
16,4	268,96	4410,944	4,0497	2,5407	51,522	211,241
16,5	272,25	4492,125	4,0620	2,5458	51,836	213,825
16,6	275,56	4574,296	4,0743	2,5509	52,150	216,424
16,7	278,89	4657,463	4,0866	2,5561	52,465	219,040
16,8	282,24	4741,632	4,0988	2,5612	52,779	221,671
16,9	285,61	4826,809	4,1110	2,5662	53,093	224,318
17,0	289,00	4913,000	4,1231	2,5713	53,407	226,980
17,1	292,41	5000,211	4,1352	2,5763	53,721	229,658
17,2	295,84	5088,448	4,1473	2,5813	54,035	232,352
17,3	299,29	5177,717	4,1593	2,5863	54,350	235,062
17,4	302,76	5268,024	4,1713	2,5913	54,664	237,787
17,5	306,25	5359,375	4,1833	2,5962	54,978	240,528
17,6	309,76	5451,776	4,1952	2,6012	55,292	243,285
17,7	313,29	5545,233	4,2071	2,6061	55,606	246,057
17,8	316,84	5639,752	4,2190	2,6110	55,920	248,846
17,9	320,41	5735,339	4,2308	2,6159	56,235	251,649
18,0	324,00	5832,000	4,2426	2,6207	56,549	254,469
18,1	327,61	5929,741	4,2544	2,6256	56,863	257,304
18,2	331,24	6028,568	4,2661	2,6304	57,177	260,155
18,3	334,89	6128,487	4,2778	2,6352	57,491	263,022
18,4	338,56	6229,504	4,2895	2,6400	57,805	265,904
18,5	342,25	6331,625	4,3012	2,6448	58,119	268,803
18,6	345,96	6434,856	4,3128	2,6495	58,434	271,716
18,7	349,69	6539,203	4,3243	2,6543	58,748	274,646
18,8	353,44	6644,672	4,3359	2,6590	59,062	277,591
18,9	357,21	6751,269	4,3474	2,6637	59,376	280,552
19,0	361,00	6859,000	4,3589	2,6684	59,690	283,529
19,1	364,81	6967,871	4,3704	2,6731	60,004	286,521
19,2	368,64	7077,888	4,3818	2,6777	60,319	289,529
19,3	372,49	7189,057	4,3932	2,6824	60,633	292,553
19,4	376,36	7301,384	4,4045	2,6870	60,947	295,592
19,5	380,25	7414,875	4,4159	2,6916	61,261	298,648
19,6	384,16	7529,536	4,4272	2,6962	61,575	301,719
19,7	388,09	7645,373	4,4385	2,7008	61,889	304,805
19,8	392,04	7762,392	4,4497	2,7053	62,204	307,907
19,9	*396,01*	7880,599	4,4609	2,7099	62,518	311,026
20,0	*400,00*	8000,000	4,4721	2,7144	62,832	314,159

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
20,0	400,00	8 000,000	4,4721	2,7144	62,832	314,159
20,1	404,01	8 120,601	4,4833	2,7189	63,146	317,309
20,2	408,04	8 242,408	4,4944	2,7234	63,460	320,474
20,3	412,09	8 365,427	4,5056	2,7279	63,774	323,655
20,4	416,16	8 489,664	4,5166	2,7324	64,088	326,851
20,5	420,25	8 615,125	4,5277	2,7369	64,403	330,064
20,6	424,36	8 741,816	4,5387	2,7413	64,717	333,292
20,7	428,49	8 869,743	4,5497	2,7457	65,031	336,535
20,8	432,64	8 998,912	4,5607	2,7501	65,345	339,795
20,9	436,81	9 129,329	4,5717	2,7545	65,659	343,070
21,0	441,00	9 261,000	4,5826	2,7589	65,973	346,361
21,1	445,21	9 393,931	4,5935	2,7633	66,288	349,667
21,2	449,44	9 528,128	4,6043	2,7677	66,602	352,989
21,3	453,69	9 663,597	4,6152	2,7720	66,916	356,327
21,4	457,96	9 800,344	4,6260	2,7763	67,230	359,681
21,5	462,25	9 938,375	4,6368	2,7806	67,544	363,050
21,6	466,56	10 077,696	4,6476	2,7850	67,858	366,435
21,7	470,89	10 218,313	4,6583	2,7892	68,173	369,836
21,8	475,24	10 360,232	4,6690	2,7935	68,487	373,253
21,9	479,61	10 503,459	4,6797	2,7978	68,801	376,685
22,0	484,00	10 648,000	4,6904	2,8020	69,115	380,133
22,1	488,41	10 793,861	4,7011	2,8063	69,429	383,596
22,2	492,84	10 941,048	4,7117	2,8105	69,743	387,076
22,3	497,29	11 089,567	4,7223	2,8147	70,058	390,571
22,4	501,76	11 239,424	4,7329	2,8189	70,372	394,081
22,5	506,25	11 390,625	4,7434	2,8231	70,686	397,608
22,6	510,76	11 543,176	4,7539	2,8273	71,000	401,150
22,7	515,29	11 697,083	4,7645	2,8314	71,314	404,708
22,8	519,84	11 852,352	4,7749	2,8356	71,628	408,281
22,9	524,41	12 008,989	4,7854	2,8397	74,942	411,871
23,0	529,00	12 167,000	4,7958	2,8439	72,257	415,476
23,1	533,61	12 326,391	4,8062	2,8480	72,571	419,096
23,2	538,24	12 487,168	4,8166	2,8521	72,885	422,733
23,3	542,89	12 649,337	4,8270	2,8562	73,199	426,385
23,4	547,56	12 812,904	4,8374	2,8603	73,513	430,053
23,5	552,25	12 977,875	4,8477	2,8643	73,827	433,736
23,6	556,96	13 144,256	4,8580	2,8684	74,142	437,435
23,7	561,69	13 312,053	4,8683	2,8724	74,456	441,150
23,8	566,44	13 481,272	4,8785	2,8765	74,770	444,881
23,9	571,21	13 651,919	4,8888	2,8805	75,084	448,627
24,0	576,00	13 824,000	4,8990	2,8845	75,398	452,389
24,1	580,81	13 997,521	4,9092	2,8885	75,712	456,167
24,2	585.64	14 172,488	4,9193	2,8925	76,027	459,961
24,3	590.49	14 348,907	4,9295	2,8965	76,341	463,770
24,4	595,36	14 526,784	4,9396	2,9004	76,655	467,595
24,5	600,25	14 706,125	4,9497	2,9044	76,969	471,435
24,6	605,16	14 886,936	4,9598	2,9083	77,283	475,292
24,7	610,09	15 069,223	4,9699	2,9123	77,597	479,164
24,8	*615,04*	15 252,992	4,9800	2,9162	77,911	483,051
24,9	*620,01*	15 438,249	4.9900	2,9201	78,226	486,955
25,0	*625,00*	15 625,000	5,0000	2,9240	78,540	490,874

25 — 30

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
25,0	625,00	15 625,000	5,0000	2,9240	78,540	490,874
25,1	630,01	15 813,251	5,0099	2,9279	78,854	494,809
25,2	635,04	16 003,008	5,0199	2,9318	79,168	498,759
25,3	640,09	16 194,277	5,0299	2,9357	79,482	502,726
25,4	645,16	16 387,064	5,0398	2,9395	79,796	506,707
25,5	650,25	16 581,375	5,0498	2,9434	80,111	510,705
25,6	655,36	16 777,216	5,0596	2,9472	80,425	514,719
25,7	660,49	16 974,593	5,0695	2,9511	80,739	518,748
25,8	665,64	17 173,512	5,0794	2,9549	81,053	522,792
25,9	670,81	17 373,979	5,0892	2,9587	81,367	526,853
26,0	676,00	17 576,000	5,0990	2,9625	81,681	530,929
26,1	681,21	17 779,581	5,1088	2,9663	81,996	535,021
26,2	686,44	17 984,728	5,1186	2,9701	82,310	539,129
26,3	691,69	18 191,447	5,1284	2,9738	82,624	543,252
26,4	696,96	18 399,744	5,1381	2,9776	82,938	547,391
26,5	702,25	18 609,625	5,1478	2,9814	83,252	551,546
26,6	707,56	18 821,096	5,1575	2,9851	83,566	555,716
26,7	712,89	19 034,163	5,1672	2,9888	83,881	559,902
26,8	718,24	19 248,832	5,1769	2,9926	84,195	564,104
26,9	723,61	19 465,109	5,1865	2,9963	84,509	568,322
27,0	729,00	19 683,000	5,1962	3,0000	84,823	572,555
27,1	734,41	19 902,511	5,2058	3,0037	85,137	576,804
27,2	739,84	20 123,648	5,2154	3,0074	85,451	581,069
27,3	745,29	20 346,417	5,2249	3,0111	85,765	585,349
27,4	750,76	20 570,824	5,2345	3,0147	86,080	589,646
27,5	756,25	20 796,875	5,2440	3,0184	86,394	593,957
27,6	761,76	21 024,576	5,2536	3,0221	86,708	598,285
27,7	767,29	21 353,933	5,2631	3,0257	87,022	602,628
27,8	772,84	21 484,952	5,2726	3,0293	87,336	606,987
27,9	778,41	21 717,639	5,2820	3,0330	87,650	611,362
28,0	784,00	21 952,000	5,2915	3,0366	87,965	615,752
28,1	789,61	22 188,041	5,3009	3,0402	88,279	620,158
28,2	795,24	22 425,768	5,3104	3,0438	88,593	624,580
28,3	800,89	22 665,187	5,3198	3,0474	88,907	629,018
28,4	806,56	22 906,304	5,3292	3,0510	89,221	633,471
28,5	812,25	23 149,125	5,3385	3,0546	89,535	637,940
28,6	817,96	23 393,656	5,3479	3,0581	89,850	642,424
28,7	823,69	23 639,903	5,3572	3,0617	90,164	646,925
28,8	829,44	23 887,872	5,3666	3,0652	90,478	651,441
28,9	835,21	24 137,569	5,3759	3,0688	90,792	655,972
29,0	841,00	24 389,000	5,3852	3,0723	91,106	660,520
29,1	846,81	24 642,171	5,3944	3,0758	91,420	665,083
29,2	852,64	24 897,088	5,4037	3,0794	91,735	669,662
29,3	858,49	25 153,757	5,4129	3,0829	92,049	674,256
29,4	864,36	25 412,184	5,4222	3,0864	92,363	678,867
29,5	870,25	25 672,375	5,4314	3,0899	92,677	683,493
29,6	876,16	25 934,336	5,4406	3,0934	92,991	688,134
29,7	882,09	26 198,073	5,4498	3,0968	93,305	692,792
29,8	888,04	26 463,592	5,4589	3,1003	93,619	697,465
29,9	894,01	26 730,899	5,4681	3,1038	93,934	702,154
30,0	*900,00*	27 000,000	5,4772	3,1072	94,248	706,858

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
30,0	900,00	27 000,000	5,4772	3,1072	94,248	706,858
30,1	906,01	27 270,901	5,4863	3,1107	94,562	711,579
30,2	912,04	27 543,608	5,4955	3,1141	94,876	716,315
30,3	918,09	27 818,127	5,5045	3,1176	95,190	721,066
30,4	924,16	28 094,464	5,5136	3,1210	95,504	725,834
30,5	930,25	28 372,625	5,5227	3,1244	95,819	730,617
30,6	936,36	28 652,616	5,5317	3,1278	96,133	735,415
30,7	942,49	28 934,443	5,5408	3,1312	96,447	740,230
30,8	948,64	29 218,112	5,5498	3,1346	96,761	745,060
30,9	954,81	29 503,629	5,5588	3,1380	97,075	749,906
31,0	961,00	29 791,000	5,5678	3,1414	97,389	754,768
31,1	967,21	30 080,231	5,5767	3,1448	97,704	759,645
31,2	973,44	30 371,328	5,5857	3,1481	98,018	764,538
31,3	979,69	30 664,297	5,5946	3,1515	98,332	769,447
31,4	985,96	30 959,144	5,6036	3,1548	98,646	774,371
31,5	992,25	31 255,875	5,6125	3,1582	98,960	779,311
31,6	998,56	31 554,496	6,6214	3,1615	99,274	784,267
31,7	1004,89	31 855,013	5,6303	3,1648	99,588	789,239
31,8	1011,24	32 157,432	5,6391	3,1682	99,903	794,226
31,9	1017,61	32 461,759	5,6480	3,1715	100,22	799,229
32,0	1024,00	32 768,000	5,6569	3,1748	100,53	804,248
32,1	1030,41	33 076,161	5,6657	3,1781	100,85	809,282
32,2	1036,84	33 386,248	5,6745	3,1814	101,16	814,332
32,3	1043,29	33 698,267	5,6833	3,1847	101,47	819,398
32,4	1049,76	34 012,224	5,6921	3,1880	101,79	824,480
32,5	1056,25	34 328,125	5,7009	3,1913	102,10	829,577
32,6	1062,76	34 645,976	5,7096	3,1945	102,42	834,690
32,7	1069,29	34 965,783	5,7184	3,1978	102,73	839,818
32,8	1075,84	35 287,552	5,7271	3,2010	103,04	844,963
32,9	1082,41	35,611,289	5,7359	3,2043	103,36	850,123
33,0	1089,00	35 937,000	5,7446	3,2075	103,67	855,299
33,1	1095,61	36 264,691	5,7533	3,2108	103,99	860,490
33,2	1102,24	36 594,368	5,7619	3,2140	104,30	865,697
33,3	1108,89	36 926,037	5,7706	3,2172	104,62	870,920
33,4	1115,56	37 259,704	5,7792	3,2204	104,93	876,159
33,5	1122,25	37 595,375	5,7879	3,2237	105,24	881,413
33,6	1128,96	37 933,056	5,7966	3,2269	105,56	886,683
33,7	1135,69	38 272,753	5,8052	3,2301	105,87	891,969
33,8	1142,44	38 614,472	5,8138	3,2332	106,19	897,270
33,9	1149,21	38 958,219	5,8224	3,2364	106,50	902,587
34,0	1156,00	39 304,000	5,8310	3,2396	106,81	907,920
34,1	1162,81	39 651,821	5,8395	3,2428	107,13	913,269
34,2	1169,64	40 001,688	5,8481	3,2460	107,44	918,633
34,3	1176,49	40,353,607	5,8566	3,2491	107,76	924,013
34,4	1183,36	40 707,584	5,8652	3,2523	108,07	929,409
34,5	1190,25	41 063,625	5,8737	3,2554	108,38	934,820
34,6	1197,16	41 421,736	5,8822	3,2586	108,70	940,247
34,7	1204,09	41 781,923	5,8907	3,2617	109,01	945,690
34,8	1211,04	42 144,192	5,8992	3,2648	109,33	951,149
34,9	*1218,01*	42 508,549	5,9076	3,2679	109,64	956,623
35,0	*1225,00*	42 875,000	5,9161	3,2711	109,96	962,113

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
35,0	1225,00	42 875,000	5,9161	3,2711	109,96	962,113
35,1	1232,01	43 243,551	5,9245	3,2742	110,27	967,618
35,2	1239,04	43 614,208	5,9330	3,2773	110,58	973,140
35,3	1246,09	43 986,977	5,9414	3,2804	110,90	978,677
35,4	1253,16	44 361,864	5,9498	3,2835	111,21	984,230
35,5	1260,25	44 738,875	5,9582	3,2866	111,53	989,798
35,6	1267,36	45 118,016	5,9666	3,2897	111,84	995,382
35,7	1274,49	45 499,293	5,9749	3,2927	112,15	1000,98
35,8	1281,64	45 882,712	5,9833	3,2958	112,47	1006,60
35,9	1288,81	46 268,279	5,9917	3,2989	112,78	1012,23
36,0	1296,00	46 656,000	6,0000	3,3019	113,10	1017,88
36,1	1303,21	47 045,881	6,0083	3,3050	113,41	1023,54
36,2	1310,44	47 437,928	6,0116	3,3080	113,73	1029,22
36,3	1317,69	47 832,147	6,0249	3,3111	114,04	1034,91
36,4	1324,96	48 228,544	6,0332	3,3141	114,35	1040,62
36,5	1332,25	48 627,125	6,0415	3,3171	114,67	1046,35
36,6	1339,56	49 027,896	6,0498	3,3202	114,98	1052,09
36,7	1346,89	49 430,863	6,0581	3,3232	115,30	1057,84
36,8	1354,24	49 836,032	6,0663	3,3262	115,61	1063,62
36,9	1361,61	50 243,409	6,0745	3,3292	115,92	1069,41
37,0	1369,00	50 653,000	6,0828	3,3322	116,24	1075,21
37,1	1376,41	51 064,811	6,0910	3,3352	116,55	1081,03
37,2	1383,84	51 478,848	6,0992	3,3382	116,87	1086,87
37,3	1391,29	51 895,117	6,1074	3,3412	117,18	1092,72
37,4	1398,76	52 313,624	6,1156	3,3442	117,50	1098,58
37,5	1406,25	52 734,375	6,1237	3,3472	117,81	1104,47
37,6	1413,76	53 157,376	6,1319	3,3501	118,12	1110,36
37,7	1421,29	53 582,633	6,1400	3,3531	118,44	1116,28
37,8	1428,84	54 010,152	6,1482	3,3561	118,75	1122,21
37,9	1436,41	54 439,939	6,1563	3,3590	119,07	1128,15
38,0	1444,00	54 872,000	6,1644	3,3620	119,38	1134,11
38,1	1451,61	55 306,341	6,1725	3,3649	119,69	1140,09
38,2	1459,24	55 742,968	6,1806	3,3679	120,01	1146,08
38,3	1466,89	56 181,887	6,1887	3,3708	120,32	1152,09
38,4	1474,56	56 623,104	6,1968	3,3737	120,64	1158,12
38,5	1482,25	57 066,625	6,2048	3,3767	120,95	1164,16
38,6	1489,96	57 512,456	6,2129	3,3796	121,27	1170,21
38,7	1497,69	57 960,603	6,2209	3,3825	121,58	1176,28
38,8	1505,44	58 411,072	6,2290	3,3854	121,89	1182,37
38,9	1513,21	58 863,869	6,2370	3,3883	122,21	1188,47
39,0	1521,00	59 319,000	6,2450	3,3912	122,52	1194,59
39,1	1528,81	59 776,471	6,2530	3,3941	122,84	1200,72
39,2	1536,64	60 236,288	6,2610	3,3970	123,15	1206,87
39,3	1544,49	60 698,457	6,2690	3,3999	123,46	1213,04
39,4	1552,36	61 162,984	6,2769	3,4028	123,78	1219,22
39,5	1560,25	61 629,875	6,2849	3,4056	124,09	1225,42
39,6	1568,16	62 099,136	6,2929	3,4085	124,41	1231,63
39,7	1576,09	62 570,773	6,3008	3,4114	124,72	1237,86
39,8	1584,04	63 044,792	6,3087	3,4142	125,04	1244,10
39,9	1592,01	63 521,199	6,3166	3,4171	125,35	1250,36
40,0	*1600,00*	*64 000,000*	6,3246	3,4200	125,66	1256,64

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
40,0	1600,00	64 000,000	6,3246	3,4200	125,66	1256,64
40,1	1608,01	64 481,201	6,3325	3,4228	125,98	1262,93
40,2	1616,04	64 964,808	6,3403	3,4256	126,29	1269,23
40,3	1624,09	65 450,827	6,3482	3,4285	126,61	1275,56
40,4	1632,16	65 939,264	6,3561	3,4313	126,92	1281,90
40,5	1640,25	66 430,125	6,3640	3,4341	127,23	1288,25
40,6	1648,36	66 923,416	6,3718	3,4370	127,55	1294,62
40,7	1656,49	67 419,143	6,3797	3,4398	127,86	1301,00
40,8	1664,64	67 917,312	6,3875	3,4426	128,18	1307,41
40,9	1672,81	68 417,929	6,3953	3,4454	128,49	1313,82
41,0	1681,00	68 921,000	6,4031	3,4482	128,81	1320,25
41,1	1689,21	69 426,531	6,4109	3,4510	129,12	1326,70
41,2	1697,44	69 934,528	6,4187	3,4538	129,43	1333,17
41,3	1705,69	70 444,997	6,4265	3,4566	129,75	1339,65
41,4	1713,96	70 957,944	6,4343	3,4594	130,06	1346,14
41,5	1722,25	71 473,375	6,4420	3,4622	130,38	1352,65
41,6	1730,56	71 991,296	6,4498	3,4650	130,69	1359,18
41,7	1738,89	72 511,713	6,4576	3,4677	131,00	1365,72
41,8	1747,24	73 034,623	6,4653	3,4705	131,32	1372,28
41,9	1755,61	73 560,059	6,4730	3,4733	131,63	1378,85
42,0	1764,00	74 088,000	6,4807	3,4760	131,95	1385,44
42,1	1772,41	74 618,461	6,4885	3,4788	132,26	1392,05
42,2	1780,84	75 151,448	6,4961	3,4815	132,58	1398,67
42,3	1789,29	75 686,967	6,5038	3,4843	132,89	1405,31
42,4	1797,76	76 225,024	6,5115	3,4870	133,20	1411,96
42,5	1806,25	76 765,625	6,5192	3,4898	133,52	1418,63
42,6	1814,76	77 308,776	6,5269	3,4925	133,83	1425,31
42,7	1823,29	77 854,483	6,5345	3,4952	134,15	1432,01
42,8	1831,84	78 402,752	6,5422	3,4980	134,46	1438,72
42,9	1840,41	78 953,589	6,5498	3,5007	134,77	1445,45
43,0	1849,00	79 507,000	6,5574	3,5034	135,09	1452,20
43,1	1857,61	80 062,991	6,5651	3,5061	135,40	1458,96
43,2	1866,24	80 621,568	6,5727	3,5088	135,72	1465,74
43,3	1874,89	81 182,737	6,5803	3,5115	136,03	1472,54
43,4	1883,56	81 746,504	6,5879	3,5142	136,35	1479,34
43,5	1892,25	82 312,875	6,5955	3,5169	136,66	1486,17
43,6	1900,96	82 881,856	6,6030	3,5196	136,97	1493,01
43,7	1909,69	83 453,453	6,6106	3,5223	137,29	1499,87
43,8	1918,44	84 027,672	6,6182	3,5250	137,60	1506,74
43,9	1927,21	84 604,519	6,6257	3,5277	137,92	1513,63
44,0	1936,00	85 184,000	6,6332	3,5303	138,23	1520,53
44,1	1944,81	85 766,121	6,6408	3,5330	138,54	1527,45
44,2	1953,64	86 350,888	6,6483	3,5357	138,86	1534,39
44,3	1962,49	86 938,307	6,6558	3,5384	139,17	1541,34
44,4	1971,36	87 528,384	6,6633	3,5410	139,49	1548,30
44,5	1980,25	88 121,125	6,6708	3,5437	139,80	1555,28
44,6	1989,16	88 716,536	6,6783	3,5463	140,12	1562,28
44,7	1998,09	89 314,623	6,6858	3,5490	140,43	1569,30
44,8	2007,04	89 915,392	6,6933	3,5516	140,74	1576,33
44,9	2016,01	90 518,849	6,7007	3,5543	141,06	1583,37
45,0	2025,00	91 125,000	6,7082	3,5569	141,37	1590,43

n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
2025,00	91 125,000	6,7082	3,5569	141,37	1590,43
2034,01	91 733,851	6,7157	3,5595	141,69	1597,51
2043,04	92 345,408	6,7231	3,5622	142,00	1604,60
2052,09	92 959,677	6,7305	3,5648	142,31	1611,71
2061,16	93 576,664	6,7380	3,5674	142,63	1618,83
2070,25	94 196,375	6,7454	3,5700	142,94	1625,97
2079,36	94 818,816	6,7528	3,5726	143,26	1633,13
2088,49	95 443,993	6,7602	3,5752	143,57	1640,30
2097,64	96 071,912	6,7676	3,5778	143,88	1647,48
2106,81	96 702,579	6,7750	3,5805	144,20	1654,68
2116,00	97 336,000	6,7823	3,5830	144,51	1661,90
2125,21	97 972,181	6,7897	3,5856	144,83	1669,14
2134,44	98 611,128	6,7971	3,5882	145,14	1676,39
2143,69	99 252,847	6,8044	3,5908	145,46	1683,65
2152,96	99 897,344	6,8118	3,5934	145,77	1690,93
2162,25	100 544,625	6,8191	3,5960	146,08	1698,23
2171,56	101 194,696	6,8264	3,5986	146,40	1705,54
2180,89	101 847,563	6,8337	3,6011	146,71	1712,87
2190,24	102 503,232	6,8411	3,6037	147,03	1720,21
2199,61	103 161,709	6,8484	3,6063	147,34	1727,57
2209,00	103 823,000	6,8557	3,6088	147,65	1734,94
2218,41	104 487,111	6,8629	3,6114	147,97	1742,34
2227,84	105 154,048	6,8702	3,6139	148,28	1749,74
2237,29	105 823,817	6,8775	3,6165	148,60	1757,16
2246,76	106 496,424	6,8848	3,6190	148,91	1764,60
2256,25	107 171,875	6,8920	3,6216	149,23	1772,05
2265,76	107 850,176	6,8993	3,6241	149,54	1779,52
2275,29	108 531,333	6,9065	3,6267	149,85	1787,01
2284,84	109 215,352	6,9138	3,6292	150,17	1794,51
2294,41	109 902,239	6,9209	3,6317	150,48	1802,03
2304,00	110 592,000	6,9282	3,6342	150,80	1809,56
2313,61	111 284,641	6,9354	3,6368	151,11	1817,11
2323,24	111 980,168	6,9426	3,6393	151,42	1824,67
2332,89	112 678,587	6,9498	3,6418	151,74	1832,25
2342,56	113 379,904	6,9570	3,6443	152,05	1839,84
2352,25	114 084,125	6,9642	3,6468	152,37	1847,45
2361,96	114 791,256	6,9714	3,6493	152,68	1855,08
2371,69	115 501,303	6,9785	3,6518	153,00	1862,72
2381,44	116 214,272	6,9857	3,6543	153,31	1870,38
2391,21	116 930,169	6,9929	3,6568	153,62	1878,05
2401,00	117 649,000	7,0000	3,6593	153,94	1885,74
2410,81	118 370,771	7,0071	3,6618	154,25	1893,45
2420,64	119 095,488	7,0143	3,6643	154,57	1901,17
2430,49	119 823,157	7,0214	3,6668	154,88	1908,90
2440,36	120 553,784	7,0285	3,6692	155,19	1916,65
2450,25	121 287,375	7,0356	3,6717	155,51	1924,42
2460,16	122 023,936	7,0427	3,6742	155,82	1932,21
2470,09	122 763,473	7,0498	3,6767	156,14	1940,00
2480,04	123 505,992	7,0569	3,6791	156,45	1947,82
2490,01	*124 251,499*	7,0640	3,6816	156,77	1955,65
2500,00	125 000,000	7,0711	3,6840	157,08	1963,50

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
50,0	2500,00	125 000,000	7,0711	3,6840	157,08	1963,50
50,1	2510,01	125 751,501	7,0781	3,6865	157,39	1971,36
50,2	2520,04	126 506,008	7,0852	3,6889	157,71	1979,23
50,3	2530,09	127 263,527	7,0922	3,6914	158,02	1987,13
50,4	2540,16	128 024,064	7,0993	3,6938	158,34	1995,04
50,5	2550,25	128 787,625	7,1063	3,6963	158,65	2002,96
50,6	2560,36	129 554,216	7,1134	3,6987	158,96	2010,90
50,7	2570,49	130 323,843	7,1204	3,7011	159,28	2018,86
50,8	2580,64	131 096,512	7,1274	3,7036	159,59	2026,83
50,9	2590,81	131 872,229	7,1344	3,7060	159,91	2034,82
51,0	2601,00	132 651,000	7,1414	3,7084	160,22	2042,82
51,1	2611,21	133 432,831	7,1484	3,7109	160,54	2050,84
51,2	2621,44	134 217,728	7,1554	3,7133	160,85	2058,87
51,3	2631,69	135 005,697	7,1624	3,7157	161,16	2066,92
51,4	2641,96	135 796,744	7,1694	3,7181	161,48	2074,99
51,5	2652,25	136 590,875	7,1764	3,7205	161,79	2083,07
51,6	2662,56	137 388,096	7,1833	3,7229	162,11	2091,17
51,7	2672,89	138 188,413	7,1903	3,7253	162,42	2099,28
51,8	2683,24	138 991,832	7,1972	3,7277	162,73	2107,41
51,9	2693,61	139 798,359	7,2042	3,7301	163,05	2115,56
52,0	2704,00	140 608,000	7,2111	3,7325	163,36	2123,72
52,1	2714,41	141 420,761	7,2180	3,7349	163,68	2131,89
52,2	2724,84	142 236,648	7,2250	3,7373	163,99	2140,08
52,3	2735,29	143 055,667	7,2319	3,7397	164,31	2148,29
52,4	2745,76	143 877,824	7,2388	3,7421	164,62	2156,51
52,5	2756,25	144 703,125	7,2457	3,7444	164,93	2164,75
52,6	2766,76	145 531,576	7,2526	3,7468	165,25	2173,01
52,7	2777,29	146 363,183	7,2595	3,7492	165,56	2181,28
52,8	2787,84	147 197,952	7,2664	3,7516	165,88	2189,56
52,9	2798,41	148 035,889	7,2732	3,7539	166,19	2197,87
53,0	2809,00	148 877,000	7,2801	3,7563	166,50	2206,18
53,1	2819,61	149 721,291	7,2870	3,7586	166,82	2214,52
53,2	2830,24	150 568,768	7,2938	3,7610	167,13	2222,87
53,3	2840,89	151 419,437	7,3007	3,7634	167,45	2231,23
53,4	2851,56	152 273,304	7,3075	3,7657	167,76	2239,61
53,5	2862,25	153 130,375	7,3144	3,7681	168,08	2248,01
53,6	2872,96	153 990,656	7,3212	3,7704	168,39	2256,42
53,7	2883,69	154 854,153	7,3280	3,7728	168,70	2264,84
53,8	2894,44	155 720,872	7,3348	3,7751	169,02	2273,29
53,9	2905,21	156 590,819	7,3417	3,7774	169,33	2281,75
54,0	2916,00	157 464,000	7,3485	3,7798	169,65	2290,22
54,1	2926,81	158 340,421	7,3553	3,7821	169,96	2298,71
54,2	2937,64	159 220,088	7,3621	3,7844	170,27	2307,22
54,3	2948,49	160 103,007	7,3689	3,7868	170,59	2315,74
54,4	2959,36	160 989,184	7,3756	3,7891	170,90	2324,28
54,5	2970,25	161 878,625	7,3824	3,7914	171,22	2332,83
54,6	2981,16	162 771,336	7,3892	3,7937	171,53	2341,40
54,7	2992,09	163 667,323	7,3959	3,7960	171,85	2349,98
54,8	3003,04	164 566,592	7,4027	3,7983	172,16	2358,58
54,9	3014,01	165 469,149	7,4095	3,8006	172,47	2367,20
55,0	3025,00	166 375,000	7,4162	3,8030	172,79	2375,83

55 — 60

	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
,0	3025,00	166 375,000	7,4162	3,8030	172,79	2375,83
1	3036,01	167 284,151	7,4229	3,8053	173,10	2384,48
2	3047,04	168 196,608	7,4297	3,8076	173,42	2393,14
3	3058,09	169 112,377	7,4364	3,8099	173,73	2401,82
4	3069,16	170 031,464	7,4431	3,8121	174,04	2410,51
5	3080,25	170 953,875	7,4498	3,8144	174,36	2419,22
6	3091,36	171 879,616	7,4565	3,8167	174,67	2427,95
7	3102,49	172 808,693	7,4632	3,8190	174,99	2436,69
8	3113,64	173 741,112	7,4699	3,8213	175,30	2445,45
9	3124,81	174 676,879	7,4766	3,8236	175,62	2454,22
,0	3136,00	175 616,000	7,4833	3,8259	175,93	2463,01
,1	3147,21	176 558,481	7,4900	3,8281	176,24	2471,81
,2	3158,44	177 504,328	7,4967	3,8304	176,56	2480,63
,3	3169,69	178 453,547	7,5033	3,8327	176,87	2489,47
,4	3180,96	179 406,144	7,5100	3,8349	177,19	2498,32
,5	3192,25	180 362,125	7,5166	3,8372	177,50	2507,19
,6	3203,56	181 321,496	7,5233	3,8395	177,81	2516,07
,7	3214,89	182 284,263	7,5299	3,8417	178,13	2524,97
,8	3226,24	183 250,432	7,5366	3,8440	178,44	2533,88
,9	3237,61	184 220,009	7,5432	3,8462	178,76	2542,81
,0	3249,00	185 193,000	7,5498	3,8485	179,07	2551,76
,1	3260,41	186 169,411	7,5565	3,8508	179,38	2560,72
,2	3271,84	187 149,218	7,5631	3,8530	179,70	2569,70
,3	3283,29	188 132,517	7,5697	3,8552	180,01	2578,69
,4	3294,76	189 119,224	7,5763	3,8575	180,33	2587,70
,5	3306,25	190 109,375	7,5829	3,8597	180,64	2596,72
,6	3317,76	191 102,976	7,5895	3,8620	180,96	2605,76
,7	3329,29	192 100,033	7,5961	3,8642	181,27	2614,82
,8	3340,84	193 100,552	7,6026	3,8664	181,58	2623,89
,9	3352,41	194 104,539	7,6092	3,8687	181,90	2632,98
,0	3364,00	195 112,000	7,6158	3,8709	182,21	2642,08
,1	3375,61	196 122,941	7,6223	3,8731	182,53	2651,20
,2	3387,24	197 137,368	7,6289	3,8753	182,84	2660,33
,3	3398,89	198 155,287	7,6354	3,8775	183,15	2669,48
,4	3410,56	199 176,704	7,6420	3,8798	183,47	2678,65
,5	3422,25	200 201,625	7,6485	3,8820	183,78	2687,83
,6	3433,96	201 230,056	7,6551	3,8842	184,10	2697,03
,7	3445,69	202 262,003	7,6616	3,8864	184,41	2706,24
,8	3457,44	203 297,472	7,6681	3,8886	184,73	2715,47
,9	3469,21	204 336,469	7,6746	3,8908	185,04	2724,71
,0	3481,00	205 379,000	7,6811	3,8930	185,35	2733,97
,1	3492,81	206 425,071	7,6877	3,8952	185,67	2743,25
,2	3504,64	207 474,688	7,6942	3,8974	185,98	2752,54
,3	3516,49	208 527,857	7,7006	3,8996	186,30	2761,84
,4	3528,36	209 584,584	7,7071	3,9018	186,61	2771,17
,5	3540,25	210 644,875	7,7136	3,9040	186,92	2780,51
,6	3552,16	211 708,736	7,7201	3,9061	187,24	2789,86
,7	3564,09	212 776,173	7,7266	3,9083	187,55	2799,23
,8	3576,04	213 847,192	7,7330	3,9105	187,87	2808,62
9	*3588,01*	*214 921,799*	7,7395	3,9127	188,18	2818,02
0	*3600,00*	*216 000,000*	7,7460	3,9149	188,50	2827,43

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
60,0	3600,00	216 000,000	7,7460	3,9149	188,50	2827,43
60,1	3612,01	217 081,801	7,7524	3,9170	188,81	2836,87
60,2	3624,04	218 167,208	7,7589	3,9192	189,12	2846,31
60,3	3636,09	219 256,227	7,7653	3,9214	189,44	2855,78
60,4	3648,16	220 348,864	7,7717	3,9235	189,75	2865,26
60,5	3660,25	221 445,125	7,7782	3,9257	190,07	2874,75
60,6	3672,36	222 545,016	7,7846	3,9279	190,38	2884,26
60,7	3684,49	223 648,543	7,7910	3,9300	190,69	2893,79
60,8	3696,64	224 755,712	7,7974	3,9322	191,01	2903,33
60,9	3708,81	225 866,529	7,8038	3,9343	191,32	2912,89
61,0	3721,00	226 981,000	7,8102	3,9365	191,64	2922,47
61,1	3733,21	228 099,131	7,8166	3,9386	191,95	2932,06
61,2	3745,44	229 220,928	7,8230	3,9408	192,27	2941,66
61,3	3757,69	230 346,397	7,8294	3,9429	192,58	2951,28
61,4	3769,96	231 475,544	7,8358	3,9451	192,89	2960,92
61,5	3782,25	232 608,375	7,8422	3,9472	193,21	2970,57
61,6	3794,56	233 744,896	7,8486	3,9494	193,52	2980,24
61,7	3806,89	234 885,113	7,8549	3,9515	193,84	2989,92
61,8	3819,24	236 029,032	7,8613	3,9536	194,15	2999,62
61,9	3831,61	237 176,659	7,8677	3,9558	194,46	3009,34
62,0	3844,00	238 328,000	7,8740	3,9579	194,78	3019,07
62,1	3856,41	239 483,061	7,8804	3,9600	195,09	3028,82
62,2	3868,84	240 641,848	7,8867	3,9621	195,41	3038,58
62,3	3881,29	241 804,367	7,8930	3,9643	195,72	3048,36
62,4	3893,76	242 970,624	7,8994	3,9664	196,04	3058,15
62,5	3906,25	244 140,625	7,9057	3,9685	196,35	3067,96
62,6	3918,76	245 314,376	7,9120	3,9706	196,66	3077,79
62,7	3931,29	246 491,883	7,9183	3,9727	196,98	3087,63
62,8	3943,84	247 673,152	7,9246	3,9748	197,29	3097,48
62,9	3956,41	248 858,189	7,9310	3,9770	197,61	3107,36
63,0	3969,00	250 047,000	7,9373	3,9791	197,92	3117,25
63,1	3981,61	251 239,591	7,9436	3,9812	198,23	3127,15
63,2	3994,24	252 435,968	7,9498	3,9833	198,55	3137,07
63,3	4006,89	253 636,137	7,9561	3,9854	198,86	3147,00
63,4	4019,56	254 840,104	7,9624	3,9875	199,18	3156,96
63,5	4032,25	256 047,875	7,9687	3,9896	199,49	3166,92
63,6	4044,96	257 259,456	7,9750	3,9916	199,81	3176,90
63,7	4057,69	258 474,853	7,9812	3,9937	200,12	3186,90
63,8	4070,44	259 694,072	7,9875	3,9958	200,43	3196,92
63,9	4083,21	260 917,119	7,9937	3,9979	200,75	3206,95
64,0	4096,00	262 144,000	8,0000	4,0000	201,06	3216,99
64,1	4108,81	263 374,721	8,0062	4,0021	201,38	3227,05
64,2	4121,64	264 609,288	8,0125	4,0042	201,69	3237,13
64,3	4134,49	265 847,707	8,0187	4,0062	202,00	3247,22
64,4	4147,36	267 089,984	8,0250	4,0083	202,32	3257,33
64,5	4160,25	268 336,125	8,0312	4,0104	202,63	3267,45
64,6	4173,16	269 586,136	8,0374	4,0125	202,95	3277,59
64,7	4186,09	270 840,023	8,0436	4,0145	203,26	3287,75
64,8	*4199,04*	272 097,792	8,0498	4,0166	203,58	3297,92
64,9	*4212,01*	273 359,449	8,0561	4,0187	203,89	3308,10
65,0	*4225,00*	274 625,000	8,0623	4,0207	204,20	3318,31

n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
4225,00	274 625,000	8,0623	4,0207	204,20	3318,31
4238,01	275 894,451	8,0685	4,0228	204,52	3328,53
4251,04	277 167,808	8,0747	4,0248	204,83	3338,76
4264,09	278 445,077	8,0808	4,0269	205,15	3349,01
4277,16	279 726,264	8,0870	4,0290	205,46	3359,27
4290,25	281 011,375	8,0932	4,0310	205,78	3369,55
4303,36	282 300,416	8,0994	4,0331	206,09	3379,85
4316,49	283 593,393	8,1056	4,0351	206,40	3390,16
4329,64	284 890,312	8,1117	4,0372	206,72	3400,49
4342.81	286 191,179	8,1179	4,0392	207,03	3410,83
4356,00	287 496,000	8,1240	4,0412	207,35	3421,19
4369,21	288 804,781	8,1302	4,0433	207,66	3431,57
4382,44	290 117,528	8,1363	4,0453	207,97	3441,96
4395,69	291 434,247	8,1425	4,0474	208,29	3452,37
4408,96	292 754,944	8,1486	4,0494	208,60	3462,79
4422,25	294 079,625	8,1548	4,0514	208,92	3473,23
4435,56	295 408,296	8,1609	4,0534	209,23	3483,68
4448,89	296 740,963	8,1670	4,0555	209,54	3494,15
4462,24	298 077,632	8,1731	4,0575	209,86	3504,64
4475,61	299 418,309	8,1792	4,0595	210,17	3515,14
4489,00	300 763,000	8,1854	4,0615	210,49	3525,65
4502,41	302 111,711	8,1915	4,0636	210,80	3536,18
4515,84	303 464,448	8,1976	4,0656	211,12	3546,73
4529,29	304 821,217	8,2037	4,0676	211,43	3557,30
4542,76	306 182,024	8,2098	4,0696	211,74	3567,88
4556,25	307 546,875	8,2158	4,0716	212,06	3578,47
4569,76	308 915,776	8,2219	4,0736	212,37	3589,08
4583,29	310 288,733	8,2280	4,0756	212,69	3599,71
4596,84	311 665,752	8,2341	4,0776	213,00	3610,35
4610,41	313 046,839	8,2401	4,0797	213,51	3621,01
4624,00	314 432,000	8,2462	4,0817	213,63	3631,68
4637,61	315 821,241	8,2523	4,0837	213,94	3642,37
4651,24	317 214,568	8,2583	4,0857	214,26	3653,08
4664,89	318 611,987	8,2644	4,0877	214,57	3663,80
4678,56	320 013,504	8,2704	4,0896	214,88	3674,53
4692,25	321 419,125	8,2765	4,0916	215,20	3685,28
4705,96	322 828,856	8,2825	4,0936	215,51	3696,05
4719,69	324 242,703	8,2885	4,0956	215,83	3706,84
4733,44	325 660,672	8,2946	4,0976	216,14	3717,64
4747,21	327 082,769	8,3006	4,0996	216,46	3728,45
4761,00	328 509,000	8,3066	4,1016	216,77	3739,28
4774,81	329 939,371	8,3126	4,1035	217,08	3750,13
4788,64	331 373,888	8,3187	4,1055	217,40	3760,99
4802,49	332 812,557	8,3247	4,1075	217,71	3771,87
4816,36	334 255,384	8,3307	4,1095	218,03	3782,76
4830,25	335 702,375	8,3367	4,1114	218,34	3793,67
4844,16	337 153,536	8,3427	4,1134	218,65	3804,59
4858,09	338 608,873	8,3487	4,1154	218,97	3815,53
4872,04	340 068,392	8,3546	4,1174	219,28	3826,49
4886,01	*341 532,099*	8,3606	4,1193	219,60	3837,46
4900,00	*343 000,000*	8,3666	4,1213	219,91	3848,45

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
70,0	4900,00	343 000,000	8,3666	4,1213	219,91	3848,45
70,1	4914,01	344 472,101	8,3726	4,1232	220,23	3859,45
70,2	4928,04	345 948,408	8,3785	4,1252	220,54	3870,47
70,3	4942,09	347 428,927	8,3845	4,1272	220,85	3881,51
70,4	4957,16	348 913,664	8,3905	4,1291	221,17	3892,56
70,5	4970,25	350 402,625	8,3964	4,1311	221,48	3903,63
70,6	4984,36	351 895,816	8,4024	4,1330	221,80	3914,71
70,7	4989,49	353 393,243	8,4083	4,1350	222,11	3925,80
70,8	5012,64	354 894,912	8,4143	4,1369	222,42	3936,92
70,9	5026,81	356 400,829	8,4202	4,1389	222,74	3948,05
71,0	5041,00	357 911,000	8,4261	4,1408	223,05	3959,19
71,1	5055,21	359 425,431	8,4321	4,1428	223,37	3970,35
71,2	5069,44	360 944,128	8,4380	4,1447	223,68	3981,53
71,3	5083,69	362 467,097	8,4439	4,1466	224,00	3992,72
71,4	5097,96	363 994,344	8,4499	4,1486	224,31	4003,93
71,5	5112,25	365 525,875	8,4558	4,1505	224,62	4015,15
71,6	5126,56	367 061,696	8,4617	4,1524	224,94	4026,39
71,7	5140,89	368 601,813	8,4676	4,1544	225,25	4037,65
71,8	5155,24	370 146,232	8,4735	4,1563	255,57	4048,92
71,9	5169,61	371 694,959	8,4794	4,1582	225,88	4060,20
72,0	5184,00	373 248,000	8,4853	4,1602	226,19	4071,50
72,1	5198,41	374 805,361	8,4912	4,1621	226,51	4082,82
72,2	5212,84	376 367,048	8,4971	4,1640	226,82	4094,15
72,3	5227,29	377 933,067	8,5029	4,1659	227,14	4105,50
72,4	5241,76	379 503,424	8,5088	4,1679	227,45	4116,87
72,5	5256,25	381 078,125	8,5147	4,1698	227,77	4128,25
72,6	5270,76	382 657,176	8,5206	4,1717	228,08	4139,65
72,7	5285,29	384 240,583	8,5264	4,1736	228,39	4151,06
72,8	5299,84	385 828,352	8,5323	4,1755	228,71	4162,48
72,9	5314,41	387 420,489	8,5381	4,1774	229,02	4173,93
73,0	5329,00	389 017,000	8,5440	4,1793	229,34	4185,39
73,1	5343,61	390 617,891	8,5499	4,1812	229,65	4196,86
73,2	5358,24	392 223,168	8,5557	4,1832	229,96	4208,35
73,3	5372,89	393 832,837	8,5615	4,1851	230,28	4219,86
73,4	5387,56	395 446,904	8,5674	4,1870	230,59	4231,38
73,5	5402,25	397 065,375	8,5732	4,1889	230,91	4242,92
73,6	5416,96	398 688,256	8,5790	4,1908	231,22	4254,47
73,7	5431,69	400 315,553	8,5849	4,1927	231,54	4266,04
73,8	5446,44	401 947,272	8,5907	4,1946	231,85	4277,62
73,9	5461,21	403 583,419	8,5965	4,1964	232,16	4289,22
74,0	5476,00	405 224,000	8,6023	4,1983	232,48	4300,84
74,1	5490,81	406 869,021	8,6081	4,2002	232,79	4312,47
74,2	5505,64	408 518,488	8,6139	4,2021	233,11	4324,12
74,3	5520,49	410 172,407	8,6197	4,2040	233,42	4335,78
74,4	5535,36	411 830,784	8,6255	4,2059	233,73	4347,46
74,5	5550,25	413 493,625	8,6313	4,2078	234,05	4359,16
74,6	5565,16	415 160,936	8,6371	4,2097	234,36	4370,87
74,7	5580,09	416 832,723	8,6429	4,2115	234,68	4382,59
74,8	5595,04	418 508,992	8,6487	4,2134	234,99	4394,33
74,9	*5610,01*	420 189,749	8,6545	4,2153	235,31	4406,09
75,0	*5625,00*	421 875,000	8,6603	4,2172	235,62	4417,86

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n.\pi$	$\frac{n^2.\pi}{4}$
75,0	5625,00	421 875,000	8,6603	4,2172	235,62	4417,86
75,1	5640,01	423 564,751	8,6660	4,2190	235,93	4429,65
75,2	5655,04	425 259,008	8,6718	4,2209	236,25	4441,46
75,3	5670,09	426 957,777	8,6776	4,2228	236,56	4453,28
75,4	5685,15	428 661,064	8,6833	4,2246	236,88	4465,11
75,5	5700,25	430 368,875	8,6891	4,2265	237,19	4476,97
75,6	5715,36	432 081,216	8,6948	4,2284	237,50	4488,83
75,7	5730,49	433 798,093	8,7006	4,2302	237,82	4500,72
75,8	5745,64	435 519,512	8,7063	4,2321	238,13	4512,62
75,9	5760,81	437 245,479	8,7121	4,2340	238,45	4524,53
76,0	5776,00	438 976,000	8,7178	4,2358	238,76	4536,46
76,1	5791,21	440 711,081	8,7235	4,2377	239,08	4548,41
76,2	5806,44	442 450,728	8,7293	4,2395	239,39	4560,37
76,3	5821,69	444 194,947	8,7350	4,2414	239,70	4572,34
76,4	5836,90	445 943,744	8,7407	4,2432	240,02	4584,34
76,5	5852,25	447 697,125	8,7464	4,2451	240,33	4596,35
76,6	5867,56	449 455,096	8,7521	4,2469	240,65	4608,37
76,7	5882,89	451 217,663	8,7579	4,2488	240,96	4620,41
76,8	5898,24	452 984,832	8,7636	4,2506	241,27	4632,47
76,9	5913,61	454 756,509	8,7693	4,2525	241,59	4644,54
77,0	5929,00	456 533,000	8,7750	4,2543	241,90	4656,63
77,1	5944,41	458 314,011	8,7807	4,2562	242,22	4668,73
77,2	5959,84	460 099,648	8,7864	4,2580	242,53	4680,85
77,3	5975,29	461 889,917	8,7920	4,2598	242,85	4692,98
77,4	5990,76	463 684,824	8,7977	4,2617	243,16	4705,13
77,5	6006,25	465 484,375	8,8034	4,2635	243,47	4717,30
77,6	6021,76	467 288,576	8,8091	4,2653	243,79	4729,48
77,7	6037,29	469 097,433	8,8148	4,2672	244,10	4741,68
77,8	6052,84	470 910,952	8,8204	4,2690	244,42	4753,89
77,9	6068,41	472 729,139	8,8261	4,2708	244,73	4766,12
78,0	6084,00	474 552,000	8,8318	4,2727	245,04	4778,36
78,1	6099,61	476 379,541	8,8374	4,2745	245,36	4790,62
78,2	6115,24	478 211,768	8,8431	4,2763	245,67	4802,90
78,3	6130,89	480 048,687	8,8487	4,2781	245,99	4815,19
78,4	6146,56	481 890,304	8,8544	4,2799	246,30	4827,50
78,5	6162,25	483 736,625	8,8600	4,2818	246,62	4839,82
78,6	6177,96	485 587,656	8,8657	4,2836	246,93	4852,16
78,7	6193,69	487 443,403	8,8713	4,2854	247,24	4864,51
78,8	6209,44	489 303,872	8,8769	4,2872	247,56	4876,88
78,9	6225,21	491 169,069	8,8826	4,2890	247,87	4889,27
79,0	6241,00	493 039,000	8,8882	4,2908	248,19	4901,67
79,1	6256,81	494 913,671	8,8938	4,2927	248,50	4914,09
79,2	6272,64	496 793,088	8,8994	4,2945	248,81	4926,52
79,3	6288,49	498 677,257	8,9051	4,2963	249,13	4938,97
79,4	6304,36	500 566,184	8,9107	4,2981	249,44	4951,43
79,5	6320,25	502 459,875	8,9163	4,2999	249,76	4963,91
79,6	6336,16	504 358,336	8,9219	4,3017	250,07	4976,41
79,7	6352,09	506 261,573	8,9275	4,3035	250,38	4988,92
79,8	6368,04	508 169,592	8,9331	4,3053	250,70	5001,45
79,9	6384,01	510 082,399	8,9387	4,3071	251,01	5013,99
80,0	*6400,00*	*512 000,000*	8,9443	4,3089	251,33	5026,55

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
80,0	6400,00	512 000,000	8,9443	4,3089	251,33	5026,55
80,1	6416,01	513 922,401	8,9499	4,3107	251,64	5039,12
80,2	6432,04	515 849,608	8,9554	4,3125	251,96	5051,71
80,3	6448,09	517 781,627	8,9610	4,3143	252,27	5064,32
80,4	6464,16	519 718,464	8,9666	4,3160	252,58	5076,94
80,5	6480,25	521 660,125	8,9722	4,3178	252,90	5089,58
80,6	6496,36	523 606,616	8,9778	4,3196	253,21	5102,23
80,7	6512,49	525 557,943	8,9833	4,3214	253,53	5114,90
80,8	6528,64	527 514,112	8,9889	4,3232	253,84	5127,58
80,9	6544,81	529 475,129	8,9944	4,3250	254,15	5140,28
81,0	6561,00	531 441,000	9,0000	4,3267	254,47	5153,00
81,1	6577,21	533 411,731	9,0056	4,3285	254,78	5165,73
81,2	6593,44	535 387,328	9,0111	4,3303	255,10	5178,48
81,3	6609,69	537 367,797	9,0167	4,3321	255,41	5191,24
81,4	6625,96	539 353,144	9,0222	4,3339	255,73	5204,02
81,5	6642,25	541 343,375	9,0277	4,3356	256,04	5216,81
81,6	6658,56	543 338,496	9,0333	4,3374	256,35	5229,62
81,7	6674,89	545 338,513	9,0388	4,3392	256,67	5242,45
81,8	6691,24	547 343,432	9,0443	4,3409	256,98	5255,29
81,9	6707,61	549 353,259	9,0499	4,3427	257,30	5268,14
82,0	6724,00	551 368,000	9,0554	4,3445	257,61	5281,02
82,1	6740,41	553 387,661	9,0609	4,3463	257,92	5293,91
82,2	6756,84	555 412,248	9,0664	4,3480	258,24	5306,81
82,3	6773,29	557 441,767	9,0719	4,3498	258,55	5319,73
82,4	6789,76	559 476,224	9,0774	4,3515	258,87	5332,67
82,5	6806,25	561 515,625	9,0830	4,3533	259,18	5345,62
82,6	6822,76	563 559,976	9,0885	4,3551	259,50	5358,58
82,7	6839,29	565 609,283	9,0940	4,3568	259,81	5371,57
82,8	6855,84	567 663,552	9,0995	4,3586	260,12	5384,56
82,9	6872,41	569 722,789	9,1049	4,3603	260,44	5397,58
83,0	6889,00	571 787,000	9,1104	4,3621	260,75	5410,61
83,1	6905,61	573 856,191	9,1159	4,3638	261,07	5423,65
83,2	6922,24	575 930,368	9,1214	4,3656	261,38	5436,71
83,3	6938,89	578 009,537	9,1269	4,3673	261,69	5449,79
83,4	6955,56	580 093,704	9,1324	4,3691	262,01	5462,88
83,5	6972,25	582 182,875	9,1378	4,3708	262,32	5475,99
83,6	6988,96	584 277,056	9,1433	4,3726	262,64	5489,12
83,7	7005,69	586 376,253	9,1488	4,3743	262,95	5502,26
83,8	7022,44	588 480,472	9,1542	4,3760	263,27	5515,41
83,9	7039,21	590 589,719	9,1597	4,3778	263,58	5528,58
84,0	7056,00	592 704,000	9,1652	4,3795	263,89	5541,77
84,1	7072,81	594 823,321	9,1706	4,3813	264,21	5554,97
84,2	7089,64	596 947,688	9,1761	4,3830	264,52	5568,19
84,3	7106,49	599 077,107	9,1815	4,3847	264,84	5581,42
84,4	7123,36	601 211,584	9,1869	4,3865	265,15	5594,67
84,5	7140,25	603 351,125	9,1924	4,3882	265,46	5607,94
84,6	7157,16	605 495,736	9,1978	4,3899	265,78	5621,22
84,7	7174,09	607 645,423	9,2033	4,3917	266,09	5634,52
84,8	7191,04	609 800,192	9,2087	4,3934	266,41	5647,83
84,9	7208,01	611 960,049	9,2141	4,3951	266,72	5661,16
85,0	7225,00	614 125,000	9,2195	4,3968	267,04	5674,50

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
85,0	7225,00	614 125,000	9,2195	4,3968	267,04	5674,50
85,1	7242,01	616 295,051	9,2250	4,3986	267,35	5687,86
85,2	7259,04	618 470,208	9,2304	4,4003	267,66	5701,24
85,3	7276,09	620 650,477	9,2358	4,4020	267,98	5714,63
85,4	7293,16	622 835,864	9,2412	4,4037	268,29	5728,03
85,5	7310,25	625 026,375	9,2466	4,4054	268,61	5741,46
85,6	7327,36	627 222,016	9,2520	4,4072	268,92	5754,90
85,7	7344,49	629 422,793	9,2574	4,4089	269,23	5768,35
85,8	7361,64	631 628,712	9,2628	4,4106	269,55	5781,82
85,9	7378,81	633 839,779	9,2682	4,4123	269,86	5795,30
86,0	7396,00	636 056,000	9,2736	4,4140	270,18	5808,80
86,1	7413,21	638 277,381	9,2790	4,4157	270,49	5822,32
86,2	7430,44	640 503,928	9,2844	4,4174	270,81	5835,85
86,3	7447,69	642 735,647	9,2898	4,4191	271,12	5849,40
86,4	7464,96	644 972,544	9,2952	4,4208	271,43	5862,97
86,5	7482,25	647 214,625	9,3005	4,4225	271,75	5876,55
86,6	7499,56	649 461,896	9,3059	4,4242	272,06	5890,14
86,7	7516,89	651 714,363	9,3113	4,4259	272,38	5903,75
86,8	7534,24	653 972,032	9,3167	4,4276	272,69	5917,38
86,9	7551,61	656 234,909	9,3220	4,4293	273,00	5931,02
87,0	7569,00	658 503,000	9,3274	4,4310	273,32	5944,68
87,1	7586,41	660 776,311	9,3327	4,4327	273,63	5958,35
87,2	7603,84	663 054,848	9,3381	4,4344	273,95	5972,04
87,3	7621,29	665 338,617	9,3434	4,4361	274,26	5985,75
87,4	7638,76	667 627,624	9,3488	4,4378	274,58	5999,47
87,5	7656,25	669 921,875	9,3541	4,4395	274,89	6013,20
87,6	7673,76	672 221,376	9,3595	4,4412	275,20	6026,96
87,7	7691,29	674 526,133	9,3648	4,4429	275,52	6040,73
87,8	7708,84	676 836,152	9,3702	4,4446	275,83	6054,51
87,9	7726,41	679 151,439	9,3755	4,4463	276,15	6068,31
88,0	7744,00	681 472,000	9,3808	4,4480	276,46	6082,12
88,1	7761,61	683 797,841	9,3862	4,4496	276,77	6095,95
88,2	7779,24	686 128,968	9,3915	4,4513	277,09	6109,80
88,3	7796,89	688 465,387	9,3968	4,4530	277,40	6123,66
88,4	7814,56	690 807,104	9,4021	4,4547	277,72	6137,54
88,5	7832,25	693 154,125	9,4074	4,4564	278,03	6151,43
88,6	7849,96	695 506,456	9,4128	4,4580	278,35	6165,34
88,7	7867,69	697 864,103	9,4181	4,4597	278,66	6179,27
88,8	7885,44	700 227,072	9,4234	4,4614	278,97	6193,21
88,9	7903,21	702 595,369	9,4287	4,4630	279,29	6207,17
89,0	7921,00	704 969,000	9,4340	4,4647	279,60	6221,14
89,1	7938,81	707 347,971	9,4393	4,4664	279,92	6235,13
89,2	7956,64	709 732,288	9,4446	4,4681	280,23	6249,13
89,3	7974,49	712 121,957	9,4499	4,4698	280,54	6263,15
89,4	7992,36	714 516,984	9,4552	4,4714	280,86	6277,18
89,5	8010,25	716 917,375	9,4604	4,4731	281,17	6291,24
89,6	8028,16	719 323,136	9,4657	4,4748	281,49	6305,30
89,7	8046,09	721 734,273	9,4710	4,4764	281,80	6319,38
89,8	8064,04	724 150,792	9,4763	4,4781	282,12	6333,48
89,9	8082,01	726 572,699	9,4816	4,4797	282,43	6347,60
90,0	*8100,00*	*729 000,000*	9,4868	4,4814	282,74	6361,73

x	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\pi \cdot x$	$\frac{\pi^2 \cdot x}{4}$
90,0	8100,00	729 000,000	9,4868	4,4814	282,74	6361,73
90,1	8118,01	731 432,701	9,4921	4,4831	283,06	6375,87
90,2	8136,04	733 870,808	9,4974	4,4847	283,37	6390,03
90,3	8154,09	736 314,327	9,5025	4,4864	283,69	6404,21
90,4	8172,16	738 763,264	9,5079	4,4880	284,00	6418,40
90,5	8190,25	741 217,625	9,5131	4,4897	284,31	6432,61
90,6	8208,36	743 677,416	9,5184	4,4913	284,63	6446,83
90,7	8226,49	746 142,643	9,5237	4,4930	284,94	6461,07
90,8	8244,64	748 613,312	9,5289	4,4946	285,26	6475,33
90,9	8262,81	751 089,429	9,5341	4,4963	285,57	6489,60
91,0	8281,00	753 571,000	9,5394	4,4979	285,88	6503,88
91,1	8299,21	756 058,031	9,5446	4,4995	286,20	6518,18
91,2	8317,44	758 550,528	9,5499	4,5012	286,51	6532,50
91,3	8335,69	761 048,497	9,5551	4,5029	286,83	6546,84
91,4	8353,96	763 551,944	9,5603	4,5045	287,14	6561,18
91,5	8372,25	766 060,875	9,5656	4,5062	287,46	6575,55
91,6	8390,56	768 575,296	9,5708	4,5078	287,77	6589,93
91,7	8408,89	771 095,213	9,5760	4,5094	288,08	6604,33
91,8	8427,24	773 620,632	9,5812	4,5111	288,40	6618,74
91,9	8445,61	776 151,559	9,5864	4,5127	288,71	6633,17
92,0	8464,00	778 688,000	9,5917	4,5144	289,03	6647,61
92,1	8482,41	781 229,961	9,5969	4,5160	289,34	6662,07
92,2	8500,84	783 777,448	9,6021	4,5176	289,65	6676,54
92,3	8519,29	786 330,467	9,6073	4,5193	289,97	6691,03
92,4	8537,76	788 889,024	9,6125	4,5209	290,28	6705,54
92,5	8556,25	791 453,125	9,6177	4,5225	290,60	6720,06
92,6	8574,76	794 022,776	9,6229	4,5241	290,91	6734,60
92,7	8593,29	796 597,983	9,6281	4,5258	291,23	6749,15
92,8	8611,84	799 178,752	9,6333	4,5274	291,54	6763,72
92,9	8630,41	801 765,089	9,6385	4,5290	291,85	6778,31
93,0	8649,00	804 357,000	9,6437	4,5307	292,17	6792,91
93,1	8667,61	806 954,491	9,6488	4,5323	292,48	6807,52
93,2	8686,24	809 557,568	9,6540	4,5339	292,80	6822,16
93,3	8704,89	812 166,237	9,6592	4,5355	293,11	6836,80
93,4	8723,56	814 780,504	9,6644	4,5371	293,42	6851,47
93,5	8742,25	817 400,375	9,6695	4,5388	293,74	6866,15
93,6	8760,96	820 025,856	9,6747	4,5404	294,05	6880,84
93,7	8779,69	822 656,953	9,6799	4,5420	294,37	6895,55
93,8	8798,44	825 293,672	9,6850	4,5436	294,68	6910,28
93,9	8817,21	827 936,019	9,6902	4,5452	295,00	6925,02
94,0	8836,00	830 584,000	9,6954	4,5468	295,31	6939,78
94,1	8854,81	833 237,621	9,7005	4,5485	295,62	6954,55
94,2	8873,64	835 896,888	9,7057	4,5501	295,94	6969,34
94,3	8892,49	838 561,807	9,7108	4,5517	296,25	6984,15
94,4	8911,36	841 232,384	9,7160	4,5533	296,57	6998,97
94,5	8930,25	843 908,625	9,7211	4,5549	296,88	7013,80
94,6	8949,16	846 590,536	9,7263	4,5565	297,19	7028,65
94,7	8968,09	849 278,123	9,7314	4,5581	297,51	7043,52
94,8	8987,04	851 971,392	9,7365	4,5597	297,82	7058,40
94,9	9006,01	854 670,349	9,7417	4,5613	298,14	7073,30
95,0	9025,00	857 375,000	9,7468	4,5629	298,45	7088,22

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n \cdot \pi$	$\frac{n^2 \cdot \pi}{4}$
95,0	9025,00	857 375,000	9,7468	4,5629	298,45	7088,22
95,1	9044,01	860 085,351	9,7519	4,5645	298,77	7103,15
95,2	9063,04	862 801,408	9,7570	4,5661	299,08	7118,09
95,3	9082,09	865 523,177	9,7622	4,5677	299,39	7133,06
95,4	9101,16	868 250,664	9,7673	4,5693	299,71	7148,03
95,5	9120,25	870 983,875	9,7724	4,5709	300,02	7163,03
95,6	9139,36	873 722,816	9,7775	4,5725	300,34	7178,04
95,7	9158,49	876 467,493	9,7826	4,5741	300,65	7193,06
95,8	9177,64	879 217,912	9,7877	4,5757	300,96	7208,10
95,9	9196,81	881 974,079	9,7929	4,5773	301,28	7223,16
96,0	9216,00	884 736,000	9,7980	4,5789	301,59	7238,23
96,1	9235,21	887 503,681	9,8031	4,5804	301,91	7253,32
96,2	9254,44	890 277,128	9,8082	4,5820	302,22	7268,42
96,3	9273,69	893 056,347	9,8133	4,5836	302,54	7283,54
96,4	9292,96	895 841,344	9,8184	4,5852	302,85	7298,67
96,5	9312,25	898 632,125	9,8234	4,5868	303,16	7313,82
96,6	9331,56	901 428,696	9,8285	4,5884	303,48	7328,99
96,7	9350,89	904 231,063	9,8336	4,5900	303,79	7344,17
96,8	9370,24	907 039,232	9,8387	4,5915	304,11	7359,37
96,9	9389,61	909 853,209	9,8438	4,5931	304,42	7374,58
97,0	9409,00	912 673,000	9,8489	4,5947	304,73	7389,81
97,1	9428,41	915 498,611	9,8539	4,5963	305,05	7405,06
97,2	9447,84	918 330,048	9,8590	4,5979	305,36	7420,32
97,3	9467,29	921 167,317	9,8641	4,5994	305,68	7435,59
97,4	9486,76	924 010,424	9,8691	4,6010	305,99	7450,88
97,5	9506,25	926 859,375	9,8742	4,6026	306,31	7466,19
97,6	9525,76	929 714,176	9,8793	4,6042	306,62	7481,51
97,7	9545,29	932 574,833	9,8843	4,6057	306,93	7496,85
97,8	9564,84	935 441,352	9,8894	4,6073	307,25	7512,21
97,9	9584,41	938 313,739	9,8944	4,6089	307,56	7527,58
98,0	9604,00	941 192,000	9,8995	4,6104	307,88	7542,96
98,1	9623,61	944 076,141	9,9045	4,6120	308,19	7558,37
98,2	9643,24	946 966,168	9,9096	4,6136	308,50	7573,78
98,3	9662,89	949 862,087	9,9146	4,6151	308,82	7589,22
98,4	9682,56	952 763,904	9,9197	4,6167	309,13	7604,66
98,5	9702,25	955 671,625	9,9247	4,6183	309,45	7620,13
98,6	9721,96	958 585,256	9,9298	4,6198	309,76	7635,61
98,7	9741,69	961 504,803	9,9348	4,6214	310,08	7651,11
98,8	9761,44	964 430,272	9,9398	4,6229	310,39	7666,62
98,9	9781,21	967 361,669	9,9448	4,6245	310,70	7682,14
99,0	9801,00	970 299,000	9,9499	4,6261	311,02	7697,69
99,1	9820,81	973 242,271	9,9549	4,6276	311,33	7713,25
99,2	9840,64	976 191,488	9,9599	4,6292	311,65	7728,82
99,3	9860,49	979 146,657	9,9649	4,6307	311,96	7744,41
99,4	9880,36	982 107,784	9,9700	4,6323	312,27	7760,02
99,5	9900,25	985 074,875	9,9750	4,6338	312,59	7775,64
99,6	9920,16	988 047,936	9,9800	4,6354	312,90	7791,28
99,7	9940,09	991 026,973	9,9850	4,6369	313,22	7806,93
99,8	9960,04	994 011,992	9,9900	4,6385	313,53	7822,60
99,9	9980,01	997 002,999	9,9950	4,6400	313,85	7838,28
100,0	*10 000,0*	*1 000 000,00*	10,000	4,6416	314,16	7853,98

3) Tabelle

der

Quadrat- und Kubikwurzeln der Zahlen 100 bis 1000.

100 — 200

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
100	10,0000	4,6416	**150**	12,2474	5,3133
101	10,0499	4,6570	151	12,2882	5,3251
102	10,0995	4,6723	152	12,3288	5,3368
103	10,1489	4,6875	153	12,3693	5,3485
104	10,1980	4,7027	154	12,4097	5,3601
105	10,2470	4,7177	155	12,4499	5,3717
106	10,2956	4,7326	156	12,4900	5,3832
107	10,3441	4,7475	157	12,5300	5,3947
108	10,3923	4,7622	158	12,5698	5,4061
109	10,4403	4,7769	159	12,6095	5,4175
110	10,4881	4,7914	**160**	12,6491	5,4288
111	10,5357	4,8059	161	12,6886	5,4401
112	10,5830	4,8203	162	12,7279	5,4514
113	10,6301	4,8346	163	12,7671	5,4626
114	10,6771	4,8488	164	12,8062	5,4737
115	10,7238	4,8629	165	12,8452	5,4848
116	10,7703	4,8770	166	12,8841	5,4959
117	10,8167	4,8910	167	12,9228	5,5069
118	10,8628	4,9049	168	12,9615	5,5178
119	10,9087	4,9187	169	13,0000	5,5288
120	10,9545	4,9324	**170**	13,0384	5,5397
121	11,0000	4,9461	171	13,0767	5,5505
122	11,0454	4,9597	172	13,1149	5,5613
123	11,0905	4,9732	173	13,1529	5,5721
124	11,1355	4,9866	174	13,1909	5,5828
125	11,1803	5,0000	175	13,2288	5,5934
126	11,2250	5,0133	176	13,2665	5,6041
127	11,2694	5,0265	177	13,3041	5,6147
128	11,3137	5,0397	178	13,3417	5,6252
129	11,3578	5,0528	179	13,3791	5,6357
130	11,4018	5,0658	**180**	13,4164	5,6462
131	11,4455	5,0788	181	13,4536	5,6567
132	11,4891	5,0916	182	13,4907	5,6671
133	11,5326	5,1045	183	13,5277	5,6774
134	11,5758	5,1172	184	13,5647	5,6877
135	11,6190	5,1299	185	13,6015	5,6980
136	11,6619	5,1426	186	13,6382	5,7083
137	11,7047	5,1551	187	13,6748	5,7185
138	11,7473	5,1676	188	13,7113	5,7287
139	11,7898	5,1801	189	13,7477	5,7388
140	11,8322	5,1925	**190**	13,7840	5,7489
141	11,8743	5,2048	191	13,8203	5,7590
142	11,9164	5,2171	192	13,8564	5,7690
143	11,9583	5,2293	193	13,8924	5,7790
144	12,0000	5,2415	194	13,9284	5,7890
145	12,0416	5,2536	195	13,9642	5,7989
146	12,0830	5,2656	196	14,0000	5,8088
147	12,1244	5,2776	197	14,0357	9,8186
148	12,1655	5,2896	198	14,0712	5,8285
149	12,2066	5,3015	199	14,1067	5,8383
150	*12,2474*	5,3133	**200**	14,1421	5,8480

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
200	14,1421	5,8480	**250**	15,8114	6,2996
201	14,1774	5,8578	251	15,8430	6,3080
202	14,2127	5,8675	252	15,8745	6,3164
203	14,2478	5,8771	253	15,9060	6,3247
204	14,2829	5,8868	254	15,9374	6,3330
205	14,3178	5,8964	255	15,9687	6,3413
206	14,3527	5,9059	256	16,0000	6,3496
207	14,3875	5,9155	257	16,0312	6,3579
208	14,4222	5,9250	258	16,0624	6,3661
209	14,4568	5,9345	259	16,0935	6,3743
210	14,4914	5,9439	**260**	16,1245	6,3825
211	14,5258	5,9533	261	16,1555	6,3907
212	14,5602	5,9627	262	16,1864	6,3988
213	14,4945	5,9721	263	16,2173	6,4070
214	14,6287	5,9814	264	16,2481	6,4151
215	14,6629	5,9907	265	16,2788	6,4232
216	14,6969	6,0000	266	16,3095	6,4312
217	14,7308	6,0092	267	16,3401	6,4393
218	14,7648	6,0185	268	16,3707	6,4473
219	14,7986	6,0277	269	16,4012	6,4553
220	14,8324	6,0368	**270**	16,4317	6,4633
221	14,8661	6,0459	271	16,4621	6,4713
222	14,8997	6,0550	272	16,4924	6,4792
223	14,9332	6,0641	273	16,5227	6,4872
224	14,9666	6,0732	274	16,5529	6,4951
225	15,0000	6,0822	275	16,5831	6,5030
226	15,0333	6,0912	276	16,6132	6,5108
227	15,0665	6,1002	277	16,6433	6,5187
228	15,0997	6,1091	278	16,6733	6,5265
229	15,1327	6,1180	279	16,7033	6,5343
230	15,1658	6,1269	**280**	16,7332	6,5421
231	15,1987	6,1358	281	16,7631	6,5499
232	15,2315	6,1446	282	16,7929	6,5577
233	15,2643	6,1534	283	16,8226	6,5654
234	15,2971	6,1622	284	16,8523	6,5731
235	15,3297	6,1710	285	16,8819	6,5808
236	15,3623	6,1797	286	16,9115	6,5885
237	15,3948	6,1885	287	16,9411	6,5962
238	15,4272	6,1972	288	16,9706	6,6039
239	15,4596	6,2058	289	17,0000	6,6115
240	15,4919	6,2145	**290**	17,0294	6,6191
241	15,5242	6,2231	291	17,0587	6,6267
242	15,5563	6,2317	292	17,0880	6,6343
243	15,5885	6,2403	293	17,1172	6,6419
244	15,6205	6,2488	294	17,1464	6,6494
245	15,6525	6,2573	295	17,1756	6,6569
246	15,6844	6,2658	296	17,2047	6,6644
247	15,7162	6,2743	297	17,2337	6,6719
248	15,7480	6,2828	298	17,2627	6,6794
249	15,7797	6,2912	299	17,2916	6,6869
250	15,8114	6,2996	**300**	17,3205	6,6943

300 — 400

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
300	17,3205	6,6943	**350**	18,7083	7,0473
301	17,3494	6,7018	351	18,7350	7,0540
302	17,3781	6,7092	352	18,7617	7,0607
303	17,4069	6,7166	353	18,7883	7,0674
304	17,4356	6,7240	354	18,8149	7,0740
305	17,4642	6,7313	355	18,8414	7,0807
306	17,4929	6,7387	356	18,8680	7,0873
307	17,5214	6,7460	357	18,8944	7,0940
308	17,5499	6,7533	358	18,9209	7,1006
309	17,5784	6,7606	359	18,9473	7,1072
310	17,6068	6,7679	**360**	18,9737	7,1138
311	17,6352	6,7752	361	19,0000	7,1204
312	17,6635	6,7824	362	19,0263	7,1269
313	17,6918	6,7897	363	19,0526	7,1335
314	17,7200	6,7969	364	19,0788	7,1400
315	17,7482	6,8041	365	19,1050	7,1466
316	17,7764	6,8113	366	19,1311	7,1531
317	17,8045	6,8185	367	19,1572	7,1596
318	17,8326	6,8256	368	19,1833	7,1661
319	17,8606	6,8328	369	19,2094	7,1726
320	17,8885	6,8399	**370**	19,2354	7,1791
321	17,9165	6,8470	371	19,2614	7,1855
322	17,9444	6,8541	372	19,2873	7,1920
323	17,9722	6,8612	373	19,3132	7,1984
324	18,0000	6,8683	374	19,3391	7,2048
325	18,0278	6,8753	375	19,3649	7,2112
326	18,0555	6,8824	376	19,3907	7,2177
327	18,0831	6,8894	377	19,4165	7,2240
328	18,1108	6,8964	378	19,4422	7,2304
329	18,1384	6,9034	379	19,4679	7,2368
330	18,1659	6,9104	**380**	19,4936	7,2432
331	18,1934	6,9174	381	19,5192	7,2495
332	18,2209	6,9244	382	19,5448	7,2558
333	18,2483	6,9313	383	19,5704	7,2622
334	18,2757	6,9382	384	19,5959	7,2685
335	18,3030	6,9451	385	19,6214	7,2748
336	18,3303	6,9521	386	19,6469	7,2811
337	18,3576	6,9589	387	19,6723	7,2874
338	18,3848	6,9658	388	19,6977	7,2936
339	18,4120	6,9727	389	19,7231	7,2999
340	18,4391	6,9795	**390**	19,7484	7,3061
341	18,4662	6,9864	391	19,7737	7,3124
342	18,4932	6,9932	392	19,7990	7,3186
343	18,5203	7,0000	393	19,8242	7,3248
344	18,5472	7,0068	394	19,8494	7,3310
345	18,5742	7,0136	395	19,8746	7,3372
346	18,6011	7,0203	396	19,8997	7,3434
347	18,6279	7,0271	397	19,9249	7,3496
348	18,6548	7,0338	398	19,9499	7,3558
349	18,6815	7,0406	399	19,9750	7,3619
350	18,7083	7,0473	**400**	20,0000	7,3681

400—500

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
400	20,0000	7,3681	**450**	21,2132	7,6631
401	20,0250	7,3742	451	21,2368	7,6688
402	20,0499	7,3803	452	21,2603	7,6744
403	20,0749	7,3864	453	21,2838	7,6801
404	20,0998	7,3925	454	21,3073	7,6857
405	20,1246	7,3986	455	21,3307	7,6914
406	20,1494	7,4047	456	21,3542	7,6970
407	20,1742	7,4108	457	21,3776	7,7026
408	20,1990	7,4169	458	21,4009	7,7082
409	20,2237	7,4229	459	21,4243	7,7138
410	20,2485	7,4290	**460**	21,4476	7,7194
411	20,2731	7,4350	461	21,4709	7,7250
412	20,2978	7,4410	462	21,4942	7,7306
413	20,3224	7,4470	463	21,5174	7,7362
414	20,3470	7,4530	464	21,5407	7,7418
415	20,3715	7,4590	465	21,5639	7,7473
416	20,3961	7,4650	466	21,5870	7,7529
417	20,4206	7,4710	467	21,6102	7,7584
418	20,4450	7,4770	468	21,6333	7,7639
419	20,4695	7,4829	469	21,6564	7,7695
420	20,4939	7,4889	**470**	21,6795	7,7750
421	20,5183	7,4948	471	21,7025	7,7805
422	20,5426	7,5007	472	21,7256	7,7860
423	20,5670	7,5067	473	21,7486	7,7915
424	20,5913	7,5126	474	21,7715	7,7970
425	20,6155	7,5185	475	21,7945	7,8025
426	20,6398	7,5244	476	21,8174	7,8079
427	20,6640	7,5302	477	21,8403	7,8134
428	20,6882	7,5361	478	21,8632	7,8188
429	20,7123	7,5420	479	21,8861	7,8243
430	20,7364	7,5478	**480**	21,9089	7,8297
431	20,7605	7,5537	481	21,9317	7,8352
432	20,7846	7,5595	482	21,9545	7,8406
433	20,8087	7,5654	483	21,9773	7,8460
434	20,8327	7,5712	484	22,0000	7,8514
435	20,8567	7,5770	485	22,0227	7,8568
436	20,8806	7,5828	486	22,0454	7,8622
437	20,9045	7,5886	487	22,0681	7,8676
438	20,9284	7,5944	488	22,0907	7,8730
439	20,9523	7,6001	489	22,1133	7,8784
440	20,9762	7,6059	**490**	22,1359	7,8837
441	21,0000	7,6117	491	22,1585	7,8891
442	21,0238	7,6174	492	22,1811	7,8944
443	21,0476	7,6232	493	22,2036	7,8998
444	21,0713	7,6289	494	22,2261	7,9051
445	21,0950	7,6346	495	22,2486	7,9105
446	21,1187	7,6403	496	22,2711	7,9158
447	21,1424	7,6460	497	22,2935	7,9211
448	21,1660	7,6517	498	22,3159	7,9264
449	21,1896	7,6574	499	22,3383	7,9317
450	21,2132	7,6631	**500**	22,3607	7,9370

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
500	22,3607	7,9370	**550**	23,4521	8,1932
501	22,3830	7,9423	551	23,4734	8,1982
502	22,4054	7,9476	552	23,4947	8,2031
503	22,4277	7,9528	553	23,5160	8,2081
504	22,4499	7,9581	554	23,5372	8,2130
505	22,4722	7,9634	555	23,5584	8,2180
506	22,4944	7,9686	556	23,5797	8,2229
507	22,5167	7,9739	557	23,6008	8,2278
508	22,5389	7,9791	558	23,6220	8,2327
509	22,5610	7,9843	559	23,6432	8,2377
510	22,5832	7,9896	**560**	23,6643	8,2426
511	22,6053	7,9948	561	23,6854	8,2475
512	22,6274	8,0000	562	23,7065	8,2524
513	22,6495	8,0052	563	23,7276	8,2573
514	22,6716	8,0104	564	23,7487	8,2621
515	22,6936	8,0156	565	23,7697	8,2670
516	22,7156	8,0208	566	23,7908	8,2719
517	22,7376	8,0260	567	23,8118	8,2768
518	22,7596	8,0311	568	23,8328	8,2816
519	22,7816	8,0363	569	23,8537	8,2865
520	22,8035	8,0415	**570**	23,8747	8,2913
521	22,8254	8,0466	571	23,8956	8,2962
522	22,8473	8,0517	572	23,9165	8,3010
523	22,8692	8,0569	573	23,9374	8,3059
524	22,8910	8,0620	574	23,9583	8,3107
525	22,9129	8,0671	575	23,9792	8,3155
526	22,9347	8,0723	576	24,0000	8,3203
527	22,9565	8,0774	577	24,0208	8,3251
528	22,9783	8,0825	578	24,0416	8,3300
529	23,0000	8,0876	579	24,0624	8,3348
530	23,0217	8,0927	**580**	24,0832	8,3396
531	23,0434	8,0978	581	24,1039	8,3443
532	23,0651	8,1028	582	24,1247	8,3491
533	23,0868	8,1079	583	24,1454	8,3539
534	23,1084	8,1130	584	24,1661	8,3587
535	23,1301	8,1180	585	24,1868	8,3634
536	23,1517	8,1231	586	24,2074	8,3682
537	23,1733	8,1281	587	24,2281	8,3730
538	23,1948	8,1332	588	24,2487	8,3777
539	23,2164	8,1382	589	24,2693	8,3825
540	23,2379	8,1433	**590**	24,2899	8,3872
541	23,2594	8,1483	591	24,3105	8,3919
542	23,2809	8,1533	592	24,3311	8,3967
543	23,3024	8,1583	593	24,3516	8,4014
544	23,3238	8,1633	594	24,3721	8,4061
545	23,3452	8,1683	595	24,3926	8,4108
546	23,3666	8,1733	596	24,4131	8,4155
547	23,3880	8,1783	597	24,4336	8,4202
548	23,4094	8,1833	598	24,4540	8,4249
549	23,4307	8,1882	599	24,4745	8,4296
550	*23,4521*	8,1932	**600**	24,4949	8,4343

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
600	24,4949	8,4343	**650**	25,4951	8,6624
601	24,5153	8,4390	651	25,5147	8,6668
602	24,5357	8,4437	652	25,5343	8,6713
603	24,5561	8,4484	653	25,5539	8,6757
604	24,5764	8,4530	654	25,5734	8,6801
605	24,5967	8,4577	655	25,5930	8,6845
606	24,6171	8,4623	656	25,6125	8,6890
607	24,6374	8,4670	657	25,6320	8,6934
608	24,6577	8,4716	658	25,6515	8,6978
609	24,6779	8,4763	659	25,6710	8,7022
610	24,6982	8,4809	**660**	25,6905	8,7066
611	24,7184	8,4856	661	25,7099	8,7110
612	24,7386	8,4902	662	25,7294	8,7154
613	24,7588	8,4948	663	25,7488	8,7198
614	24,7790	8,4994	664	25,7682	8,7241
615	24,7992	8,5040	665	25,7876	8,7285
616	24,8193	8,5086	666	25,8070	8,7329
617	24,8395	8,5132	667	25,8263	8,7373
618	24,8596	8,5178	668	25,8457	8,7416
619	24,8797	8,5224	669	25,8650	8,7460
620	24,8998	8,5270	**670**	25,8844	8,7503
621	24,9199	8,5316	671	25,9037	8,7547
622	24,9399	8,5362	672	25,9230	8,7590
623	24,9600	8,5408	673	25,9422	8,7634
624	24,9800	8,5453	674	25,9615	8,7677
625	25,0000	8,5499	675	25,9808	8,7721
626	25,0200	8,5544	676	26,0000	8,7764
627	25,0400	8,5590	677	26,0192	8,7807
628	25,0599	8,5635	678	26,0384	8,7850
629	25,0799	8,5681	679	26,0576	8,7893
630	25,0998	8,5726	**680**	26,0768	8,7937
631	25,1197	8,5772	681	26,0960	8,7980
632	25,1396	8,5817	682	26,1151	8,8023
633	25,1595	8,5862	683	26,1343	8,8066
634	25,1794	8,5907	684	26,1534	8,8109
635	25,1992	8,5952	685	26,1725	8,8152
636	25,2190	8,5997	686	26,1916	8,8194
637	25,2389	8,6043	687	26,2107	8,8237
638	25,2587	8,6088	688	26,2298	8,8280
639	25,2784	8,6132	689	26,2488	8,8323
640	25,2982	8,6177	**690**	26,2679	8,8366
641	25,3180	8,6222	691	26,2869	8,8408
642	25,3377	8,6267	692	26,3059	8,8451
643	25,3574	8,6312	693	26,3249	8,8493
644	25,3772	8,6357	694	26,3439	8,8536
645	25,3969	8,6401	695	26,3629	8,8578
646	25,4165	8,6446	696	26,3818	8,8621
647	25,4362	8,6490	697	26,4008	8,8663
648	25,4558	8,6535	698	26,4197	8,8706
649	25,4755	8,6579	699	26,4386	8,8748
650	25,4951	8,6624	**700**	26,4575	8,8790

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
700	26,4575	8,8790	**750**	27,3861	9,0856
701	26,4764	8,8833	751	27,4044	9,0896
702	26,4953	8,8875	752	27,4226	9,0937
703	26,5141	8,8917	753	27,4408	9,0977
704	26,5330	8,8959	754	27,4591	9,1017
705	26,5518	8,9001	755	27,4773	9,1057
706	26,5707	8,9043	756	27,4955	9,1098
707	26,5895	8,9085	757	27,5136	9,1138
708	26,6083	8,9127	758	27,5318	9,1178
709	26,6271	8,9169	759	27,5500	9,1218
710	26,6458	8,9211	**760**	27,5681	9,1258
711	26,6646	8,9253	761	27,5862	9,1298
712	26,6833	8,9295	762	27,6043	9,1338
713	26,7021	8,9337	763	27,6225	9,1378
714	26,7208	8,9378	764	27,6405	9,1418
715	26,7395	8,9420	765	27,6586	9,1458
716	26,7582	8,9462	766	27,6767	9,1498
717	26,7769	8,9503	767	27,6948	9,1537
718	26,7955	8,9545	768	27,7128	9,1577
719	26,8142	8,9587	769	27,7308	9,1617
720	26,8328	8,9628	**770**	27,7489	9,1657
721	26,8514	8,9670	771	27,7669	9,1696
722	26,8701	8,9711	772	27,7849	9,1736
723	26,8887	8,9752	773	27,8029	9,1775
724	26,9072	8,9794	774	27,8209	9,1815
725	26,9258	8,9835	775	27,8388	9,1855
726	26,9444	8,9876	776	27,8568	9,1894
727	26,9629	8,9918	777	27,8747	9,1933
728	26,9815	8,9959	778	27,8927	9,1973
729	27,0000	9,0000	779	27,9106	9,2012
730	27,0185	9,0041	**780**	27,9285	9,2052
731	27,0370	9,0082	781	27,9464	9,2091
732	27,0555	9,0123	782	27,9643	9,2130
733	27,0740	9,0164	783	27,9821	9,2170
734	27,0924	9,0205	784	28,0000	9,2209
735	27,1109	9,0246	785	28,0179	9,2248
736	27,1293	9,0287	786	28,0357	9,2287
737	27,1477	9,0328	787	28,0535	9,2326
738	27,1662	9,0369	788	28,0713	9,2365
739	27,1846	9,0410	789	28,0891	9,2404
740	27,2029	9,0450	**790**	28,1069	9,2443
741	27,2213	9,0491	791	28,1247	9,2482
742	27,2397	9,0532	792	28,1425	9,2521
743	27,2580	9,0572	793	28,1603	9,2560
744	27,2764	9,0613	794	28,1780	9,2599
745	27,2947	9,0654	795	28,1957	9,2638
746	27,3130	9,0694	796	28,2135	9,2677
747	27,3313	9,0735	797	28,2312	9,2716
748	27,3496	9,0775	798	28,2489	9,2754
749	27,3679	9,0816	799	28,2666	9,2793
750	*27,3861*	9,0856	**800**	28,2843	9,2832

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
800	28,2843	9,2832	**850**	29,1548	9,4727
801	28,3019	9,2870	851	29,1719	9,4764
802	28,3196	9,2909	852	29,1890	9,4801
803	28,3373	9,2948	853	29,2062	9,4838
804	28,3549	9,2968	854	29,2233	9,4875
805	28,3725	9,3025	855	29,2404	9,4912
806	28,3901	9,3063	856	29,2575	9,4949
807	28,4077	9,3102	857	29,2746	9,4986
808	28,4253	9,3140	858	29,2916	9,5023
809	28,4429	9,3179	859	29,3087	9,5060
810	28,4605	9,3217	**860**	29,3258	9,5097
811	28,4781	9,3255	861	29,3428	9,5134
812	28,4956	9,3294	862	29,3598	9,5171
813	28,5132	9,3332	863	29,3769	9,5207
814	28,5307	9,3370	864	29,3939	9,5244
815	28,5482	9,3408	865	29,4109	9,5281
816	28,5657	9,3447	866	29,4279	9,5317
817	28,5832	9,3485	867	29,4449	9,5354
818	28,6007	9,3523	868	29,4618	9,5391
819	28,6182	9,3561	869	29,4788	9,5427
820	28,6356	9,3599	**870**	29,4958	9,5464
821	28,6531	9,3637	871	29,5127	9,5501
822	28,6705	9,3675	872	29,5296	9,5537
823	28,6880	9,3713	873	29,5466	9,5574
824	28,7054	9,3751	874	29,5635	9,5610
825	28,7228	9,3789	875	29,5804	9,5647
826	28,7402	9,3827	876	29,5973	9,5683
827	28,7576	9,3865	877	29,6142	9,5719
828	28,7750	9,3902	878	29,6311	9,5756
829	28,7924	9,3940	879	29,6479	9,5792
830	28,8097	9,3978	**880**	29,6648	9,5828
831	28,8271	9,4016	881	29,6816	9,5865
832	28,8444	9,4053	882	29,6985	9,5901
833	28,8617	9,4091	883	29,7153	9,5937
834	28,8791	9,4129	884	29,7321	9,5973
835	28,8964	9,4166	885	29,7489	9,6010
836	28,9137	9,4204	886	29,7658	9,6046
837	28,9310	9,4241	887	29,7825	9,6082
838	28,9482	9,4279	888	29,7993	9,6118
839	28,9655	9,4316	889	29,8161	9,6154
840	28,9828	9,4354	**890**	29,8329	9,6190
841	29,0000	9,4391	891	29,8496	9,6226
842	29,0172	9,4429	892	29,8664	9,6262
843	29,0345	9,4466	893	29,8831	9,6298
844	29,0517	9,4503	894	29,8998	9,6334
845	29,0689	9,4541	895	29,9166	9,6370
846	29,0861	9,4578	896	29,9333	9,6406
847	29,1033	9,4615	897	29,9500	9,6442
848	29,1204	9,4652	898	29,9666	9,6477
849	29,1376	9,4690	899	29,9833	9,6513
850	29,1548	9,4727	**900**	30,0000	9,6549

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
900	30,0000	9,6549	**950**	30,8221	9,8305
901	30,0167	9,6585	951	30,8383	9,8339
902	30,0333	9,6620	952	30,8545	9,8374
903	30,0500	9,6656	953	30,8707	9,8408
904	30,0666	9,6692	954	30,8869	9,8443
905	30,0832	9,6727	955	30,9031	9,8477
906	30,0998	9,6763	956	30,9192	9,8511
907	30,1164	9,6799	957	30,9354	9,8546
908	30,1330	9,6834	958	30,9516	9,8580
909	30,1496	9,6870	959	30,9677	9,8614
910	30,1662	9,6905	**960**	30,9839	9,8648
911	30,1828	9,6941	961	31,0000	9,8683
912	30,1993	9,6976	962	31,0161	9,8717
913	30,2159	9,7012	963	31,0322	9,8751
914	30,2324	9,7047	964	31,0483	9,8785
915	30,2490	9,7082	965	31,0644	9,8819
916	30,2655	9,7118	966	31,0805	9,8854
917	30,2820	9,7153	967	31,0966	9,8888
918	30,2985	9,7188	968	31,1127	9,8922
919	30,3150	9,7224	969	31,1288	9,8956
920	30,3315	9,7259	**970**	31,1448	9,8990
921	30,3480	9,7294	971	31,1609	9,9024
922	30,3645	9,7329	972	31,1769	9,9058
923	30,3809	9,7364	973	31,1929	9,9092
924	30,3974	9,7400	974	31,2090	9,9126
925	30,4138	9,7435	975	31,2250	9,9160
926	30,4302	9,7470	976	31,2410	9,9194
927	30,4467	9,7505	977	31,2570	9,9227
928	30,4631	9,7540	978	31,2730	9,9261
929	30,4795	9,7575	979	31,2890	9,9295
930	30,4959	9,7610	**980**	31,3050	9,9329
931	30,5123	9,7645	981	31,3209	9,9363
932	30,5287	9,7680	982	31,3369	9,9396
933	30,5450	9,7715	983	31,3528	9,9430
934	30,5614	9,7750	984	31,3688	9,9464
935	30,5778	9,7785	985	31,3847	9,9497
936	30,5941	9,7819	986	31,4006	9,9531
937	30,6105	9,7854	987	31,4166	9,9565
938	30,6268	9,7889	988	31,4325	9,9598
939	30,6431	9,7924	989	31,4484	9,9632
940	30,6594	9,7959	**990**	31,4643	9,9666
941	30,6757	9,7993	991	31,4802	9,9699
942	30,6920	9,8028	992	31,4960	9,9733
943	30,7083	9,8063	993	31,5119	9,9766
944	30,7246	9,8097	994	31,5278	9,9800
945	30,7409	9,8132	995	31,5436	9,9833
946	30,7571	9,8167	996	31,5595	9,9866
947	30,7734	9,8201	997	31,5753	9,9900
948	30,7896	9,8236	998	31,5911	9,9933
949	30,8058	9,8270	999	31,6070	9,9967
950	*30,8221*	9,8305	**1000**	31,6228	10,0000

Mafs- und Gewichts-Tabelle.

1 Meter (m) = 10 Decimeter (dcm) = 100 Centimeter (cm) = 1000 Millimeter (mm).
10 Meter = 1 Dekameter (dkm) oder 1 Kette (im Feldmessergebrauch ist die Kette = 2 Dekameter = 20 m).
1000 Meter = 100 dkm = 1 Kilometer (km).
7500 Meter = 1 deutsche Meile = 7,5 km.
1 Quadratmeter (qm) = 10000 Quadratcentimeter (qcm).
1 Quadratcentimeter = 100 Quadratmillimeter (qmm).
100 Quadratmeter = 1 Ar (a).
10000 Quadratmeter = 100 Ar = 1 Hektar (ha).
1 Kubikmeter (cbm) = 1000 Kubikdecimeter (cdcm) oder Liter (l).
= 1000000 Kubikcentimeter (ccm).
1 ccm = 1000 Kubikmillimeter (cmm).
100 Liter = 1 Hektoliter (hl).
50 Liter = 1 Scheffel.
1 Kilogramm (kg) = dem Gewichte eines Liters destillierten Wassers bei + 4° C.
1 Kilogramm = 1000 Gramm (g) = 2 Pfund.
1 Decigramm (dcg) = $^1/_{10}$ g.
1 Milligramm (mg) = $^1/_{1000}$ g.
10 Gramm = 1 Dekagramm (dkg) = 1 Neulot.
500 Gramm = $^1/_2$ kg = 1 Pfund.
50 Kilogramm = 100 Pfund = 1 Centner.
1000 Kilogramm = 2000 Pfund = 1 Tonne = 20 Centner.

Tabelle der spec. Gewichte einiger Körper.

(Spec. Gewicht = dem Gewichte eines cdcm des betreffenden Körpers.)

Feste Körper.

Antimon	6,72	Holz, Kiefer	0,55
Asphalt	1,07—1,16	„ „ frisch	0,91
Blei	11,40	„ Linden	0,56
Braunkohle	1,20	„ Mahagoni	0,75
Cokes	0,40	„ Nufsbaum	0,66
Chamottesteine	1,85	„ Pockholz	1,26
Eis	0,92	„ Tannen	0,56
Erde, lehmig frisch	2,10	„ „ frisch	0,89
„ trocken	1,90	Kalkstein	2,45
„ mager trocken	1,30	Kupfer, gehämmert	8,94
Glas, Fenster-	2,64	Kupfer, gegossen	8,79
„ Spiegel-	2,46	Messing	8,55
„ Krystall-	2,89	Nickel	8,28—9,26
Glockenmetall	8,80	Sand, trocken	1,64
Gold, gegossen	19,26	Sandstein	2,35
Granit	2,80	Schmiedeeisen	7,78
Gufseisen	7,25	Silber	10,47
Holz, lufttrocken:		„ gehämmert	10,51
„ Ahorn	0,67	Stahl	7,26—7,80
„ Buchen	0,75	Gufsstahl	7,87
„ Buxbaum	0,94	Steinkohle	1,21—1,51
„ Eichen	0,69	Zink, gegossen	6,80
„ „ frisch	0,97	„ gewalzt	7,00
„ Fichten	0,47	Zinn	7,29

Flüssige Körper.

Äther	0,761	Öl	0,92
Alkohol	0,792	Quecksilber	13,595
Luft	0,0013	Seewasser	1,02
Milch	1,03	Teer	1,20

Gasförmige Körper.

Atmosph. Luft	1,0000	Kohlensäure	1,5202
Sauerstoff	1,1056	Schwefl. Säure	2,2139
Stickstoff	0,9713	Leuchtgas	0,4—0,6

Wasserdampf bei 100° . . . . . 0,470.

1 cbm Luft wiegt ≃ 1,25 kg.

Verlag der Polytechnischen Buchhandlung A. Seydel in Berlin.

In ***zweiter*** *verbesserter und vermehrter Auflage ist erschienen und wird allen strebsamen, jüngeren Männern, die sich dem* ***Maschinenbau*** *widmen wollen, sowie Technikern, Werkführern und Monteuren, die in der Anfertigung der Constructions-Zeichnungen nicht genügende Kenntnis haben, bestens empfohlen:*

Die Anfertigung der Zeichnungen

für

Maschinenfabriken.

Anweisung,

technische Zeichnungen für das Constructionsbureau

und für die

Werkstätten der Maschinenfabriken

zweckmässig, sachgemäss und den Anforderungen der Praxis entsprechend herzustellen, zu vervielfältigen, zu behandeln, auszustatten und zu registrieren.

Mit erläuternden Figuren und Farbendruck-Tafeln.

Nach in der Praxis gesammelten Erfahrungen zusammengestellt und für technische Bureaux und Lehranstalten bearbeitet

von

Joh. Franz Weyde,

Dipl. Maschinen-Ingenieur, ord. Professor und Werkstätten-Vorstand an der Staats-Maschinen-Gewerbeschule zu Kaschau in Ungarn

und

A. Weickert,

Ingenieur der Berliner Maschinenbau-Actien-Gesellschaft (vorm. L. Schwartzkopff), Fachlehrer für Maschinenzeichnen etc. in Berlin.

120 S. mit 19 Textfiguren und 11 zum Teil farb. Tafeln.

1892. Preis cart. 3 M.

Aus dem Vorwort des Buches möge nur das angeführt werden:

„Nicht nur der Lernende im Maschinenwesen wird Nutzen aus diesem Buche schöpfen, sondern auch wohlerfahrene Zeichner werden so manches Verfahren und so manchen Kunstgriff hierin veröffentlicht finden, die ihnen als neu, wichtig und beachtenswert erscheinen dürften."

„Wer ein tüchtiger Maschinenbauer sein will, muss erstens gut zeichnen können — muss zweitens richtig zeichnen können und — muss wissen, wie er mit den Zeichnungen umzugehen hat."

☞ Sehr günstige **Beurteilungen**, welche die erste Auflage obigen Buches s. Z. erhalten hat, befinden sich umseitig.

Eingegangene Beurtheilungen

über die erste Auflage des Buches:

Die Anfertigung der Zeichnungen für Maschinenfabriken

von

Weyde und **Weickert.**

„Wollen Sie freundlichst meinen Dank annehmen für das mir gesandte Buch, welchem ich meine Versicherung hinzufüge, dass ich das Buch auf's Wärmste empfehlen kann.

Die in deutlichster Kürze vorgetragenen Lehren sind nicht Schulmeinungen, sondern lang bewährte Erfahrungen der Praxis u. s. w."

Darmstadt, 2. Oktober 1889. **E. Brauer,** Professor an der grossherzogl. technisch. Hochschule.

„Beehre mich, Ihnen mein Urtheil darüber dahingehend auszusprechen, dass ich von dem ganzen Inhalte desselben, sowie von der sehr zweckmässigen Uebersichtlichkeit der Behandlung des Gegenstandes vollkommen befriedigt bin u. s. w.

Indem ich schon im Interesse der dadurch geförderten Sache eine rasche Verbreitung des Buches in Fachkreisen wünsche u. s. w."

Reichenberg i. Böhm., 16. September 1889. **Prof. Jos. Pechan,** Fachvorstand der mechan.-techn. Abtheil. der k. k. Staats-Gewerbeschule.

„Soweit ich bei dem Durchsehen des Buches erkennen konnte, haben die Verfasser allen dem Maschinenzeichner vorkommenden Fragen Rechnung getragen; ich persönlich stimme mit den angegebenen Regeln betreffs der Ausführung von Maschinenzeichnungen völlig überein u. s. w."

Charlottenburg, 12. Mai 1889. **K. Hartmann,** Ingenieur und Docent. a. d. techn. Hochschule Berlin-Charlottenburg.

„Ich werde das Buch gerne weiter empfehlen."

Aachen, 10. Mai 1889. Kgl. Reg.-Baumstr. **B. Salomon,** Professor an der technischen Hochschule.

„Ich halte das Buch für entschieden nützlich und voll geeignet, die anzustrebende einheitliche, durch Einfachheit, Klarheit und Raschheit der Ausführung ausgezeichnete Darstellungsmethode von Maschinenzeichnungen zu fördern."

Prag, 10. Mai 1889. **Heinrich Gollner jr.,** Professor am deutschen Polytechnikum.

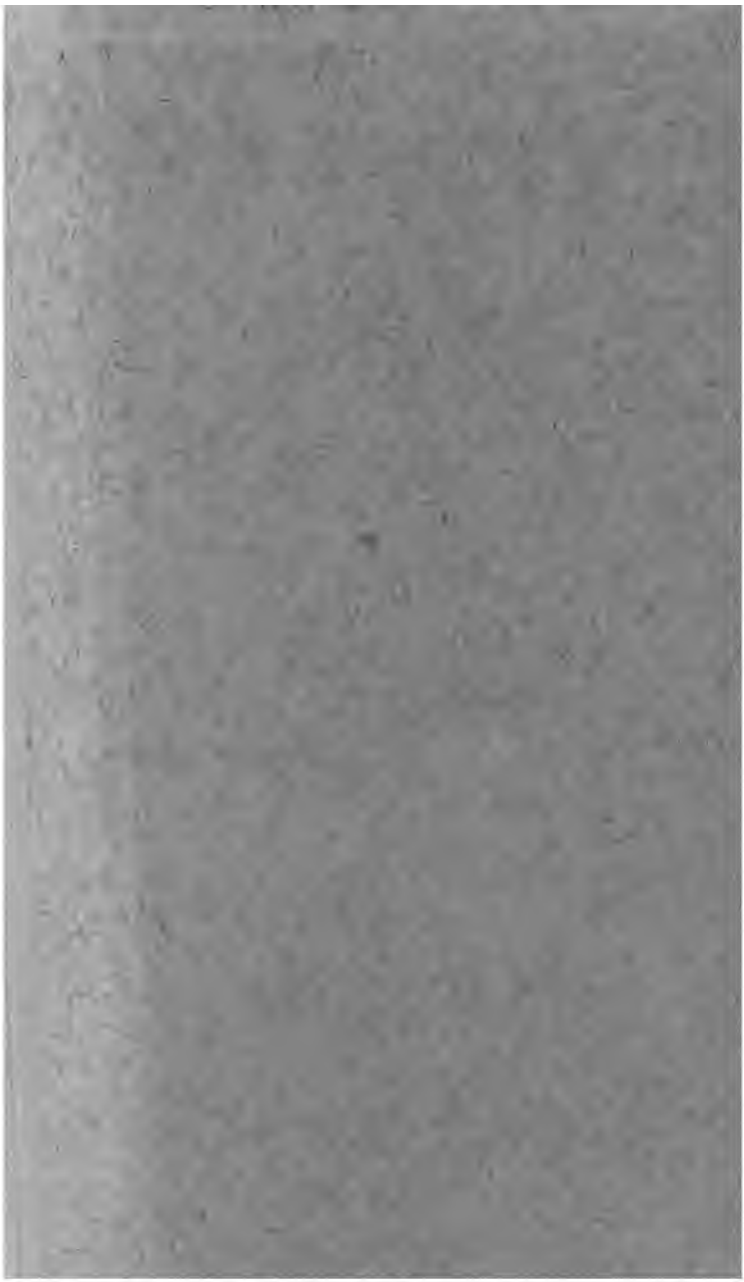
„Ein recht brauchbares und nützliches Buch."

Wien, 8. Juni 1889. **L. Kuglmayr,** Ingenieur u. k. k. Professor an der k. k. Staats-Gewerbeschule.

„Wünschenswerth wäre es, wenn auf allen Fachschulen die Zeichnungen in der angegebenen Art ausgeführt würden u. s. w."

Mittweida, 14. Mai 1889. **W. Rebber,** Ingenieur und Lehrer am Technikum.

„Ich habe das Buch mit Interesse gelesen und werde nicht ermangeln, dasselbe den Studirenden zu empfehlen."

Pribram, 18. Mai 1889. **A. Kás,** ord. Professor an der k. k. Bergakademie.

Druck von C. H. Schulze & Co. in Gräfenhainichen.